

ميكانيكا الموائع

محمد هاشم صديق

الإصدار 3

ذو القعدة 1431 - نوفمبر 2010

د. محمد هاشم صديق

قسم الهندسة الميكانيكية
كلية الهندسة
جامعة الخرطوم
hashim.siddig@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم الإصدار الثالث

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على رسوله الأمين .

يجد القارئ في هذه الإصدار تنقيحاً في المحتوى و العرض للكتاب الأصل. و التنقيح نتاج لاستخدام الكتاب ككتاب منهجي في ميكانيكا الموائع في السنوات التسع الماضية لطلاب قسم الميكانيكا بجامعة الخرطوم. يشمل الكتاب كل المواد الأساس في ميكانيكا الموائع التي تؤهل طلاب الهندسة الميكانيكية و هندسة التعدين و هندسة النفط لدرجة البكالوريوس. كما يمكن أن يفيد الكتاب طلاب الهندسة المدنية و الهندسة الزراعية إذا رُوعي غياب بعض المواد اللازمة لدرجاتهم مثل معالجة السريان في القنوات و الهايدرولوجيا. و يأمل الكاتب أيضاً أن يعين الكتاب خريجي كليات الهندسة المرتبطين بهذا المجال و أن يجد فيه الخريجون الذين درسوا بالانجليزية بعداً إضافياً للتعامل في المجال الهندسي.

و الله وليّ التوفيق.

محمد هاشم صديق

2010

قائمة المحتويات

الصفحة	الباب	رقم القسم	رقم الباب
6	تعريفات		1
13	مسائل		
15	المعادلات الأساس في ميكانيكا الموائع		2
15	متجه السريان	2.1	
17	حفظ الكتلة	2.2	
19	حفظ الطاقة	2.3	
23	حفظ الإضطراب	2.4	
27	مسائل		
29	التحليل البعدي والنمذجة		3
29	أسس التحليل البعدي	3.1	
32	بعض المقادير اللابعدية المهمة في ميكانيكا الموائع	3.2	
33	النمذجة	3.3	
35	مسائل		
36	السريان اللا إنضغاطي في الأنابيب		4
36	أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب	4.1	
42	الفقود الموضعية في الأنابيب	4.2	
44	الأنابيب المتفرعة	4.3	
47	مسائل		
49	ميكانيكا الموائع عند الاتزان النسبي		5
49	المعادلة الأساس	5.1	
50	توزيع الضغط في مجال ثنائي البعد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت	5.2	
52	توزيع الضغط في سائل ساكن	5.3	
54	الطفو	5.4	
56	مقياس الكثافة	5.5	
58	استقرار الأجسام الطافية	5.6	
61	مسائل		
63	طرق القياس		6
63	تحسس الضغط	6.1	
63	أجهزة قياس الضغط	6.2	
68	أجهزة قياس معدل السريان	6.3	
74	الدفع		7
74	الدفع	7.1	
79	الدفع النفاث	7.2	
84	الدفع الصاروخي	7.3	
86	مسائل		

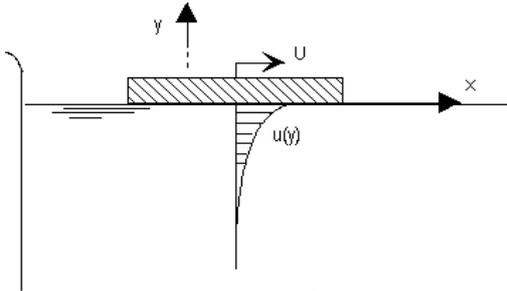
87	حفظ الإضطراب في الصورة التفاضلية		8
87	الصورة العامة للمعادلات	8.1	
89	حالات خاصة	8.2	
90	حل معادلات نافير - ستوكس	8.3	
100	مسائل		
102	الإعاقة		9
102	مقدمة	9.1	
102	معادلات الطبقة الجدارية	9.2	
105	حل فون-كارمن عند ممال الضغط صفر	9.3	
113	الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفري	9.4	
115	الفصل والإعاقة الضغطية في السريان الخارجي	9.5	
120	التحكم في الطبقة الجدارية	9.6	
123	مسائل		
124	الرفع		10
124	خصائص السريان اللالزجي	10.1	
129	إختزال معادلات نافير - ستوكس لحالة السريان اللالزجي	10.2	
132	السريان اللادوراني عبر اسطوانة	10.3	
139	الرفع على الجنيح	10.4	
142	مسائل		
143	السريان الانضغاطي للغاز		11
143	مقدمة	11.1	
146	حركة الموجات الصوتية	11.2	
152	السريان الانضغاطي اللاتبيدي	11.3	
171	مسائل		
173	الصدمة المتعامدة	11.4	
184	مسائل		
185	السريان الانضغاطي الاحتكاكي	11.5	
199	مسائل		
200	السريان الانضغاطي اللاكظمي	11.6	
210	مسائل		
211	قياس السرعة في السريان الانضغاطي	11.7	

214	قوائم خواص الماء و الجو القياسيين	الملحق أ
215	علاقات رياضية ذات صلة	الملحق ب
216	معامل الاحتكاك f للسريان في الأنابيب	الملحق ج
220	المعامل C للمقياس الفوهي	الملحق د
222	قوائم السريان الانضغاطي للهواء	الملحق هـ
229		الرموز
232		مراجع
232		فهرس و معجم (عربي-انجليزي)
239		معجم (انجليزي-عربي)

1 تعريفات

1.1 تُطلق كلمة **مانع** بشكلٍ عام على السوائل والغازات. وميكانيكا الموائع تُعنى باستنباط العلاقات الأساسية التي تُعبر عن حركة و سكون الموائع. وتضم وسائل هذا الاستنباط النماذج الرياضية التي تُبنى على ما يعرف بقوانين الحفظ الأساسية، إضافةً إلى التجربة حين تقصر الوسائل النظرية عن الاستنباط.

يُعرف المائع بأنه المادة التي يتغير شكلها باستمرار عند تعرضها لإجهادٍ قصّي، مهما صغُر هذا الإجهاد.



الشكل 1.1: علاقة القص بممال السرعة

يتضح معنى هذا التعريف من التجربة البسيطة الموضحة في الشكل (1.1) حيث نرى جسماً صلباً يتعرض لقوة أفقية صغيرة تعمل على تحريكه في اتجاه x الموجب. طبقة السائل المتاخمة للجسم تتحرك بسرعة تساوي

تماماً سرعة الجسم. ويلاحظ في التجربة تحرك طبقات السائل الأبعد فالأبعد بسرعات تقل تدريجياً في اتجاه y السالب حتى تختفي تماماً. وهذه هي السمة المميزة للموائع، ولا تُعرف في غيرها حتى إذا ضُغَّ الإجهاد القصي المبدول.

1.2 نظام الوحدات المستخدم في هذا الكتاب هو النظام العالمي للوحدات (SI). و تبيين القائمة أدناه وحداته الأساسية.

الطول	الكتلة	الزمن	درجة الحرارة	القوة	الطاقة	القدرة	الضغط
m	kg	s	K	N	J	W	Pa
متر	كيلو غرام	ثانية	كلفن	نيوتن	جول	وات	باسكال

ويمكن اشتقاق وحدات المتغيرات الأخرى من الوحدات أعلاه. كما يمكن استخدام المعامل $E3$ أو 10^3 ومشتقاته إذا صغرت أو كبرت قيمة المتغير كما يلي:

10^3	10^6	10^{-3}	10^{-6}
E3	E6	E-3	E-6
k	M	m	μ
كيلو	ميغا	ملي	مايكرو

1.3 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر كثيراً من متوسط المسار الحر للجزيئات. ويصدّق هذا الاعتبار على كل التحليلات الواردة في هذا الكتاب.

1.4 الكثافة

باعتبار أن الحجم V_0 هو مكعب أصغر مسافة ترد في التحليل وتستوفي شرط الكمية المتصلة فإن الكثافة ρ تُعرّف كما يلي:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow V_0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$$

حيث m الكتلة بالكيلوغرام و V الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة kg/m^3 .

1.5 الكثافة النسبية s

هي كثافة المادة منسوبة إلى الكثافة المعيارية للماء ، وهي 1000 kg/m^3 .

$$s = \rho / \rho_w$$

1.6 قانون الغاز الكامل

$$p = R \rho T \quad (1.1)$$

يربط هذا القانون الضغط المطلق للغاز p بالدرجة المطلقة للحرارة T و الكثافة ρ . R ثابت الغاز و قيمته للهواء $287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

1.7 السريان الإنضغاطي و السريان اللانضغاطي

يوصف السريان بأنه إنضغاطي إذا كانت تغيرات الكثافة فيه معتبرة. أما إذا كانت تغيرات الكثافة صغيرة نسبياً فعندئذ يوصف السريان بأنه لانضغاطي. الأصل إذن أن كل سريان إنضغاطي. فإن كان تجاهل انضغاطه لا يؤدي إلى خطأ تفوق نسبته نسبة الخطأ المقبول في التحليل يمكن عندها اعتبار السريان لانضغاطي. و يتبع ذلك أن التحليل في الحالة المذكورة يصبح أبسط من التحليل مع اعتماد الإنضغاطية دون تفريط في مستوى الدقة المطلوب.

1.8 السريان الرتيب

هو السريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن في أي موضع محدد.

1.9 السريان المنتظم

يوصف السريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع .

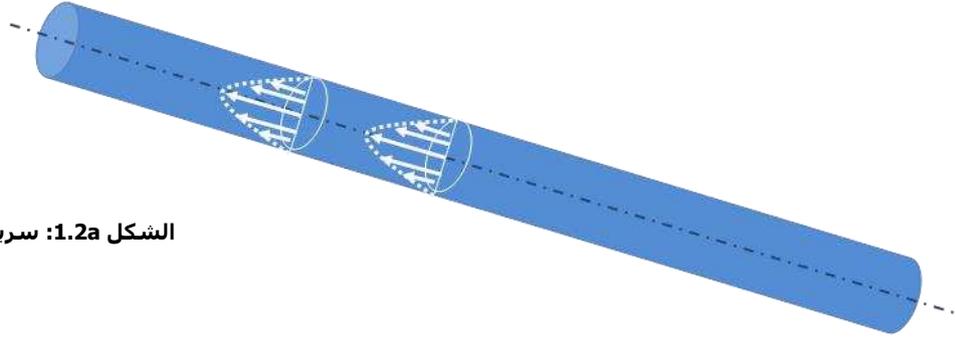
1.10 خط الانسياب

يُعرف خط الانسياب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

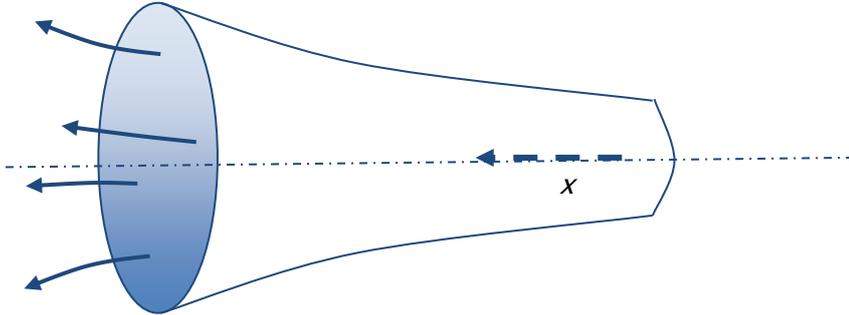
1.11 أبعاد السريان

يوصف السريان بأنه أحادي، ثنائي أو ثلاثي البعد بُناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن أن يحدد بها.

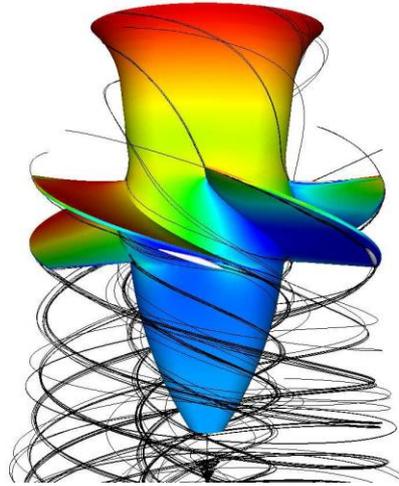
الشكل (1.2a) يعطي مثلاً لسريان أحادي البعد في أنبوب ثابت المقطع. و نرى فيه أن توزيع السرعة يعتمد فقط على الإحداثي الإشعاعي r و لا يتغير بتغير الإحداثيان x و θ .
 و الشكل (1.2b) يعطي مثلاً لسريان ثنائي البعد في أنبوب ناشر، حيث تعتمد السرعة على الإحداثيين x و r و لا تتغير بتغير θ .
 و الشكل (1.2c) يعطي مثلاً لسريان ثلاثي البعد عبر توربين كابلان، حيث تبدو خطوط السريان كدالة في الإحداثيات الثلاثة: x و r و θ .



الشكل 1.2a: سريان أحادي البعد



الشكل 1.2b: سريان ثنائي البعد



الشكل 1.2c: سريان ثلاثي البعد
 (Nilsson, Chalmers)

1.12 السريان الصفائحي والسريان المائل

يتصف السريان الصفائحي بثبات الشكل والانسايية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها البعض في شكل صفائح أو رقائق، بينما يتصف السريان المائل باضطراب مستمر في سريانه. يمكن استنباط الأسس التي تحكم تحول السريان من إحدى الحالتين إلى الأخرى بتأمل سريان الماء من صنوبر. عند فتح الصنوبر قليلاً نلاحظ انتظاماً في سريان الماء وثباتاً في شكله دون اضطراب كأنه مكون من صفائح أسطوانية تنزلق على بعضها البعض. يوصف هذا السريان بأنه **صفائحي**. بزيادة معدل السريان يُمور الماء و يضطرب ويفقد انتظامه ويوصف حينئذٍ بأنه **مائل**. ويمكن إثبات أن التحول من الحال الصفائحي إلى الحال المائل يحدث بزيادة السرعة أو زيادة القطر أو إنقاص اللزوجة. ويجمع المتغيرات الثلاثة مقدار لا يُعدي يعرف بعدد رينولز (Re) يحكم التحول المذكور. و يحدث هذا التحول للسريان في الأنابيب في المدى $2000 \leq Re \leq 4000$. و يسمى عدد رينولز الذي يحدث عنده التحول **عدد رينولز الحرج** Re_c . يتسم توزيع السرعة للسريان الصفائحي داخل الأنابيب بشكل المقطع المكافئ بينما يكون هذا التوزيع معقداً نسبياً في حالة السريان المائل.

1.13 المنظومة وحجم التحكم



الشكل 1.3: المنظومة و حجم التحكم

يستخدم لفظ المنظومة و حجم التحكم لوصف أسلوب التحليل المتبع عند دراسة مسألة بعينها. والمنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدها عن بقية المائع جدار تخيلي أو حقيقي ويمكن أن يتغير موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن أن تتغير المادة داخل حجم التحكم مع الزمن. الشكل (1.3) يبين أمثلة للمفهومين.

1.14 القوة الجسمية والقوة السطحية

القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة الكهرومغناطيسية. والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتنحصر في الضغط والقص.

1.15 الإجهاد

الإجهاد هو القوة السطحية العاملة على وحدة مساحة

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$$

و للإجهاد مركبتين إحداها عمودية و الأخرى مماسة

ويُفضّل في ميكانيكا الموائع استخدام تعبير الضغط p للمركبة المتعامدة و استخدام تعبير الإجهاد القصي τ للمركبة المماسية. وبذلك فإن متجه الإجهاد يتخذ الصورة

$$\sigma = -pn + \tau \quad (1.2)$$

1.16 الضغط المطلق و الضغط المقياسي و الضغط الفراغي

يسمى الضغط ضغطاً مطلقاً إذا كان صفره الفراغ المطلق. و يسمى ضغطاً مقياسياً إذا كان صفره الضغط الجوي. وسمي مقياسياً لأن المقاييس المستخدمة تعتبر بالضرورة الوسط المحيط صفرًا.

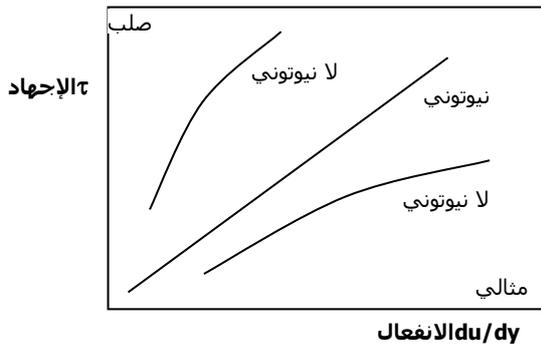
الضغط الفراغي هو ضغط مقياسي سالب. أي يفرض قيمة موجبة للضغط دون الضغط الجوي.
الضغط المقياسي = الضغط المطلق - الضغط الجوي
الضغط الفراغي = - الضغط المقياسي.

1.17 الإجهاد القصي و الانفعال

تُنسب إلى نيوتن العلاقة النظرية بين الإجهاد القصي τ و الانفعال $\frac{\partial u}{\partial y}$ للسريان الصفائحي، وهي:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلم أنها دقيقة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية، مثل الماء والهواء و منتجات النفط مثل زيت الديزل و البنزين. و يسمى ثابت المعادلة μ باللزوجة أو اللزوجة المطلقة أو اللزوجة الحركية، ووحدتها Pa.s. و تعرف الموائع التي تتفق مع هذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع النيوتونية - الشكل (1.4).



الشكل 1.4

تُسمى فصيلة الموائع التي لا تُعطي علاقة خطية بين القص والانفعال موائع لانيوتونية. أمثلة لها البوية و النفط الشمعي.

تؤثر درجة الحرارة في قيمة اللزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل و تزيد مع ازدياد الحرارة للغازات.

تُعرّف اللزوجة الكينماتية ν كما يلي:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

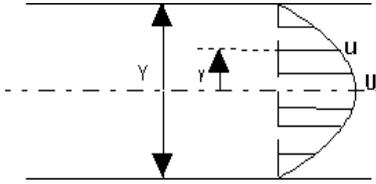
ووحدتها m^2/s .

1.18 السريان اللزجي و السريان اللالزجي

يُعرف السريان بأنه لزجي إذا نشأت فيه قوة قص ذات مقدار معتبر مقارنةً بالقوى الأخرى و إلا فيعتبر السريان لالزجي. و بمراجعة المعادلة (1.3) نرى أن مقدار القص يتعلق بحاصل ضرب اللزوجة والانفعال. فإذا عظم إحداهما أو كلاهما عظمّت القوة اللزجية و سُمي السريان لزجياً .

مثال 1.1

يسري ماء سرياناً صفائحياً رتيباً في مجرى متوازي الجدران عرضه 20mm . السرعة في خط النصف 0.1m/s . درجة حرارة الماء 25°C . قدر الإجهاد على الجدران.



الشكل 1.5

توزيع السرعة في مقطع المجرى للسريان الصفائحي

$$\frac{u}{U} = 1 - \left(\frac{2y}{Y} \right)^2$$

المعادلة (1.3) تربط الإجهاد القصي بالسرعة عند الجدار

$$\frac{du}{dy} = U \left[-\frac{8y}{Y^2} \right] = -8 \frac{yU}{Y^2}$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_w = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\pm \frac{Y}{2}} = 4 \frac{U}{Y} = 20s^{-1}$$

قائمة خواص الماء عند 25°C (الملحق أ)

$$\rho = 997.1 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.897E-6 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\mu = \rho\nu = 0.00894 \text{ Pa.s}$$

$$\tau_w = \mathbf{0.018 \text{ Pa}}$$

اتجاه القوة اتجاه x الموجب.

مثال 1.2

يتحرك مكبس قطره 50.0mm داخل اسطوانة قطرها الداخلي 50.1mm . أحسب النقصان في المائة في قوة المقاومة عندما ترتفع درجة حرارة المزلق بفعل الحركة من 20°C إلى 120°C . استخدم الخواص المدرجة أدناه لزيت التزليق وافترض ثبات سرعة المكبس وثبات أبعاده.

$T^\circ\text{C}$	$\nu \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$	$\mu \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
20	9.2	8.2
30	7.5	6.6
40	6.5	5.5
60	4.7	4.0
80	3.7	3.2
100	3.2	2.46
120	2.8	2.10

المقاومة

$$F = \tau A_w = A_w \mu \frac{du}{dr}$$

بافتراض ثبات السرعة والأبعاد

$$F = \text{const. } \mu$$

$$\frac{\Delta F}{F} 100 = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} 100$$

خواص الزيت:

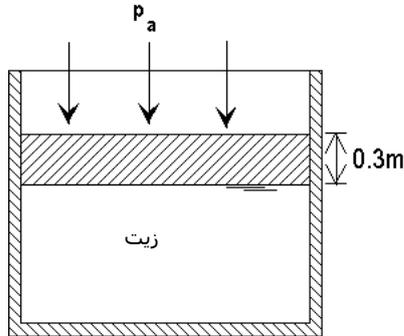
$$21 \text{ Pa.s} - 0.0082 \text{ Pa.s} , \mu_{120} = 0.00 \mu_{20} =$$

$$\Delta \mu = 0.0061$$

$$= \mathbf{74\%} \frac{\Delta F}{F} (100) = \frac{\Delta \mu}{\mu_{20}} (100)$$

مسائل

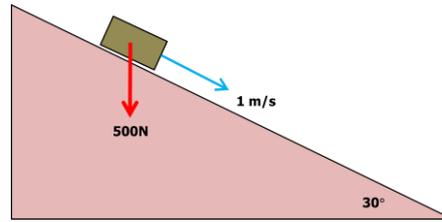
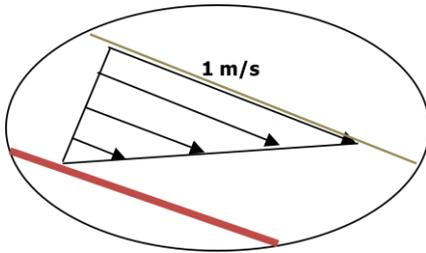
1.1 اللزوجة الحركية للهواء عند درجة الحرارة 35°C تساوي $0.00002\text{Pa}\cdot\text{s}$. أحسب اللزوجة الكينماتية عندما يكون الضغط 0.1 MPa .
 $[17.7\text{E-}6\text{ m}^2/\text{s}]$



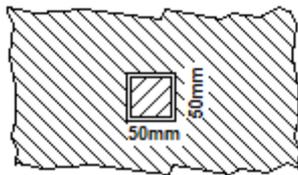
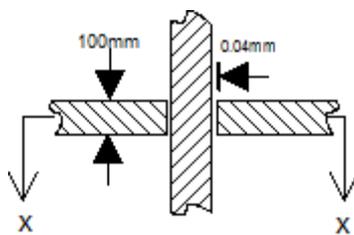
1.2 يوضح الشكل (1.6) مقطع اسطوانة ومكبس مستوي تماماً على سطح زيت. سمك المكبس 0.3m . بافتراض أن الضغط الجوي 0.101MPa و أن الكثافة النسبية للمكبس المصنوع من الصلب 7.8 أحسب الضغط على سطح الزيت.
 $[0.124\text{MPa}]$

الشكل 1.6

1.3 جسم وزن 500N ومساحة سطحه السفلي 0.2m^2 ينزلق على سطح مائل بزاوية 30° مع الأفقي - الشكل (1.7). لزوجة المزلق $0.2\text{Pa}\cdot\text{s}$. وسرعة الجسم المتحرك 1.0m/s . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المزلق خطي أحسب سمك طبقة المزلق.
 $[0.16\text{mm}]$



الشكل (1.7)



section xx

1.4 يوضح الشكل (1.8) قضيب ذا مقطع مربع، ضلعه 50mm يتحرك في مجرى معدني مغلي بمزلق لزوجته الكينماتية $5\text{E-}6\text{ m}^2/\text{s}$. وكثافته النسبية 0.86 . بافتراض أن توزيع السرعة عبر المزلق خطي أحسب قوة الإعاقة اللزجية على القضيب عندما تكون سرعته 20m/s
 $[43\text{N}]$

1.5 القائمة أدناه توضح نتيجة تجربة لسريان ماء درجة حرارته 20°C في قناة عرضها 100mm:

y [mm]	40	30	20	10	5	0	-5
u [m/s]	5.0	8.0	11.0	12.5	13.0	13.2	13.0

حُسبت y من الخط المركزي للقناة. أرسم توزيع السرعة وأثبت إمكانية تقريبها للعلاقة الرياضية:

$$u = a_0 + a_1y + a_2y^2$$

حيث a_0 و a_1 و a_2 ثوابت.

أحسب الإجهاد القصي عند الجدارين مستخدماً العلاقة أعلاه .

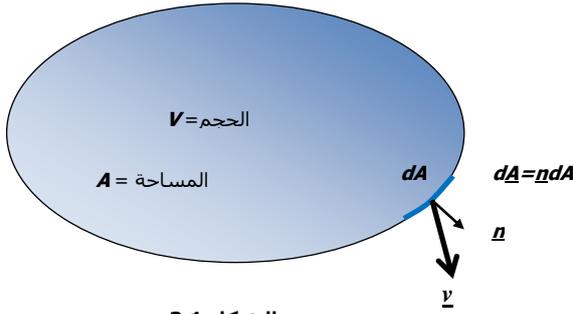
[0.49Pa]

2 المعادلات الأساس في ميكانيكا الموائع

تُرسى في هذا الفصل القواعد الأساس لميكانيكا الموائع. وهي معادلات الحفظ الثلاث: حفظ الكتلة وحفظ الطاقة وحفظ الإضطراب. ويُقدّم لذلك بتعريف متجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ. مفهوم الكتلة و الطاقة مألوفين لدى القارئ. وحدة الكتلة في نظام الوحدات العالمي الكيلوغرام [kg] و وحدة الطاقة الجول [J]. أما الإضطراب فهو قيمة متجهة و يعرف بأنه حاصل ضرب الكتلة و متجه السرعة، أي $m\mathbf{v}$ و وحدته [kg.m/s].

2.1 متجه السريان

حجم التحكم الموضح في الشكل (2.1) حجمه V و مساحة سطحه A . بالتركيز على المساحة



الشكل 2.1

التفاضلية dA نرى أن الكتلة الخارجة عبرها خلال

الوقت dt هي dm ليصبح معدل السريان $\frac{dm}{dt}$. سرعة السريان في الموضع هي المتجه \mathbf{v} بزاوية α مع المتجه أحادي الطول \mathbf{n} والمتعامد على

المساحة dA حيث $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$

$$dm = \rho dV = \rho \mathbf{v} \cdot \cos \alpha dA = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

معدل سريان الكتلة عبر كل السطح \dot{m}

$$\dot{m} = \iint_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.1)$$

تُعرّف متجه سريان الكتلة كما يلي:

متجه سريان الكتلة = (متجه السرعة) (الكتلة في وحدة حجمية) $\rho \mathbf{v}$

وبالمثل:

متجه سريان الطاقة = (متجه السرعة) (الطاقة في وحدة حجمية)

$$= \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v}$$

وبالمثل:

متجه سريان الإضطراب = (متجه السرعة) (الإضطراب في وحدة حجمية)

$$= \rho u \mathbf{v}, \rho v \mathbf{v}, \rho w \mathbf{v}$$

في الاتجاهات x, y, z على التوالي. حيث \mathbf{v} في هذا التعريف هي محصلة السرعة، u مركبة السرعة في الاتجاه x ، v مركبة السرعة في الاتجاه y و w مركبة السرعة في الاتجاه z .

وبذلك فإن معدل سريان الطاقة عبر السطح A =

$$\iint \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} \dots \dots \dots (2.2)$$

ومعدل سريان الإضطراب عبر السطح A =

$$\iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) \dots \dots \dots (2.3)$$

حيث v في المعادلتين 2.2 و 2.3 هي محصلة السرعة.

2.2 حفظ الكتلة

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:
"معدل تراكم الكتلة داخل حجم التحكم مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج حجم التحكم يساوي الصفر"

لوضع الصيغة اللفظية في الصورة الرياضية:

$$\iiint_V \rho dV = \text{الكتلة الكلية داخل حجم التحكم}$$

معدل تراكم الكتلة داخل حجم التحكم

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

من المعادلة (2.1) خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج حجم التحكم

$$\iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} =$$

و بذلك

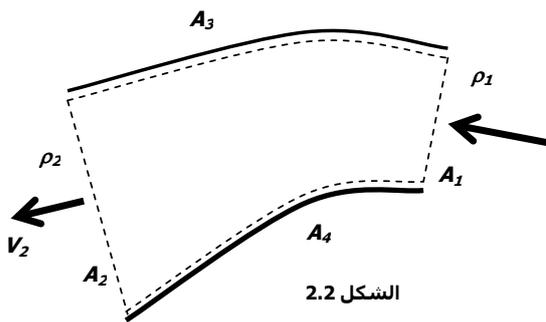
$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \dots\dots\dots(2.4)$$

المعادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية.

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد (الشكل 2.2):

الحد الأول في المعادلة (2.4) يساوي صفر نسبةً لرتابة السريان.

السطحان (3) و (4) لا تعبرهما كتلة ولذلك يصبح فيهما تكامل الحد الثاني من معادلة الكتلة صفراً .



الشكل 2.2

تُختزل معادلة الكتلة بذلك إلى الصورة :

$$= 0 \iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2$$

و بملاحظة أن المتجه الموجب \underline{A} يتجه إلى خارج حجم التحكم

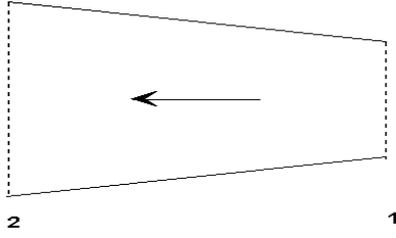
$$- \iint_{A1} \rho_1 \underline{v}_1 \cdot d\underline{A}_1 + \iint_{A2} \rho_2 \underline{v}_2 \cdot d\underline{A}_2 = 0$$

$$- \rho_1 \underline{v}_1 A_1 + \rho_2 \underline{v}_2 A_2 = 0$$

$$\rho \underline{v} A = \text{ثابت} \dots\dots\dots(2.5)$$

مثال 2.1

سريان لاإنضغاطي في مجرى ناشر



A_1	A_2	v_1	ρ
0.2 m ²	0.3m ²	2.0m/s	1000kg/m ³

أحسب السرعة المتوسطة في المقطع (2) ومعدل سريان الكتلة. السرعتان v_1 و v_2 هما السرعتان المتوسطتان في المقطعين (1) و (2). بذلك يمكن استخدام معادلة الكتلة في صورتها أحادية البعد (2.5)

$$\rho v A = \text{ثابت}$$

بما أن السريان لاإنضغاطي ثابت $\rho =$ ، $v_1 A_1 = v_2 A_2$

$$v_2 = v_1 (A_1 / A_2) = 2.0 (0.2 / 0.3) = \mathbf{1.33 \text{ m/s}}$$

$$\square \quad m = \rho v A = \rho v_1 A_1 = 1000(2.0)0.2 = \mathbf{400 \text{ kg/s.}}$$

معادلة الاستمرارية

يطلق هذا الاسم عامةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية. بدءاً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي إلى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد - أنظر المعادلة (3) في الملحق (ب).

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V (\nabla \cdot \rho \underline{v}) dV = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} \right) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل فإن قيمة المُكامل تكون صفرًا إذا كانت قيمة التكامل صفرًا و كانت حدود التكامل اختيارية.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \dots\dots\dots(2.6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \dots\dots\dots(2.6b)$$

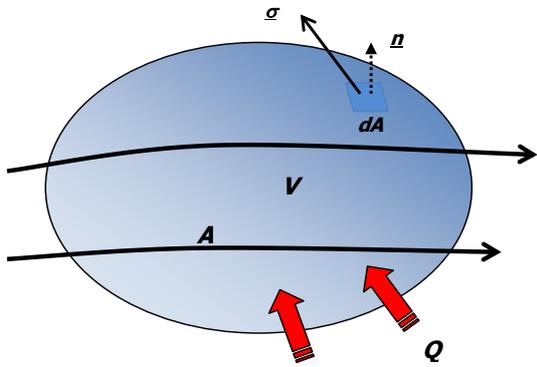
حيث u, v, w هي مركبات السرعة في الاتجاهات x, y, z .

وفي حال أن السريان لاإنضغاطي

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(2.7)$$

2.3 حفظ الطاقة

تُستمد معادلة حفظ الطاقة من القانون الأول للحركة الحرارية مطبقاً على حجم تحكم:



"معدل تراكم الطاقة داخل حجم التحكم زائداً خالص سريان الطاقة إلى خارج حجم التحكم بواسطة انتقال الكتلة يعادل القدرة المبدولة على المائع داخل حجم التحكم زائداً معدل سريان الحرارة إلى داخل حجم التحكم".

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_A (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) dA + P + \dot{Q}$$

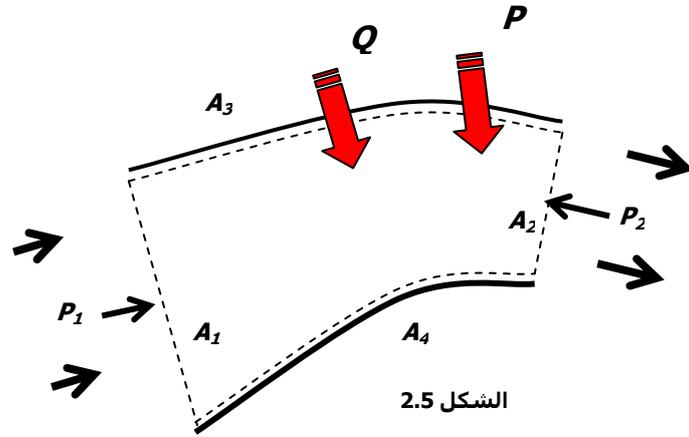
الحدان الأوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبدولة على المائع داخل حجم التحكم، و \dot{Q} معدل سريان الحرارة إلى داخل حجم التحكم.

بتجاهل اللزج يصبح الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right] dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = - \iint_A p \underline{v} \cdot d\underline{A} + P + \dot{Q}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right] dV + \iint_A \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = P + \dot{Q} \dots (2.8)$$

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد



رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي الصفر. و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4). وبذلك تختزل المعادلة إلى الصورة

$$-\rho_1(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1)v_1A_1 + \rho_2(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2)v_2A_2 = P + \dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتيب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

$$\dot{m}(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1) + P + \dot{Q} = \dot{m}(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2)$$

$$\frac{e_1}{g} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{mg} + \frac{\dot{Q}}{mg} = \frac{e_2}{g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots \dots \dots (2.9)$$

في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة $\dot{Q} = 0$

ويمكن اعتبار السريان لإنضغاطي $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

ولا يوجد تغير في درجة الحرارة $T_1 = T_2, e_1 = e_2$

فتصبح المعادلة (2.9)

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{mg} = \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots \dots \dots (2.10)$$

في حال أن القدرة P موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عنفة.

في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots \dots \dots (2.11)$$

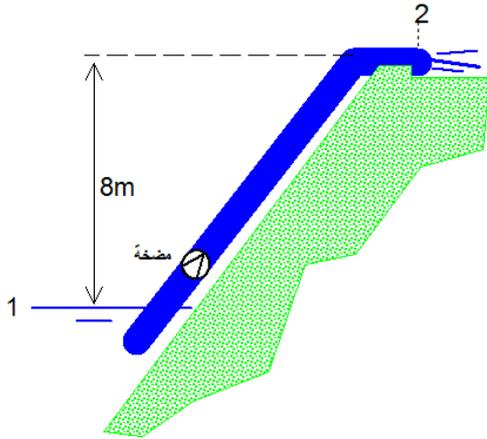
وحدة كلٍ من حدود المعادلة (2.11) وحدة طول - و هي المتر في النظام العالمي للوحدات. و المصطلح المستخدم لكلٍ من هذه الحدود هو **السمت**. و يمكن تعريف السمت الكلي كما يلي:

السمت الكلي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 =$$

مثال 2.2

يُعرّف الآتي عن وحدة ضخ ترفع الماء من النيل إلى أعلى الجرف:



- الرفع: 8m
- معدل السريان الحجمي: 15 l/s
- قطر الأنابيب صعيد المضخة: 154mm
- قطر الأنابيب سافل المضخة: 102mm
- كثافة الماء: 1000kg/m³

المطلوب حساب:

- (أ) السرعة صعيد وسافل المضخة
- (ب) القدرة الخارجة من المضخة باعتبار السريان لالزجي.

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان اللاإنضغاطي تُعطي

$$V_{ص} \cdot A_{ص} = v_{س} \cdot A_{س} = \dot{V} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_{ص} = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4} (0.154)^2} = 0.81 \text{ m/s}$$

$$v_{س} = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4} (0.102)^2} = 1.84 \text{ m/s}$$

حيث اللاحقة **ص** تعني صعيد المضخة و اللاحقة **س** تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$P = m g \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \right]$$

المقطعان (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

$$z_2 - z_1 = 8 \quad \text{كما أن}$$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر! $v_1 = 0$, $v_2 = v_d$

$$= \rho \dot{V} = 1000(0.015) = 15.0 \text{ kg/sm}^3 \quad \text{و معدل سريان الكتلة}$$

وتصبح المعادلة

$$\mathbf{P = (15.0)(9.81) \left[\frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8 \right] = 1203\text{W}}$$

.1.2 kW = القدرة الخارجة

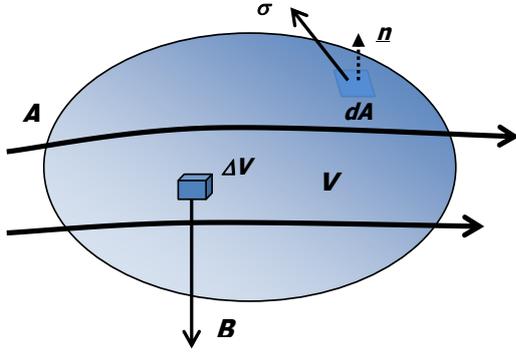
2.4 حفظ الإضطراب

تُعرّف الإضطراب بصفة عامة كنتاج ضرب الكتلة و السرعة. و هو بذلك قيمة مُتجهة.

و على نحو ما عُرف عن الكتلة و الطاقة تدل التجربة إلى أن للإضطراب في حجم التحكم قيمة محفوظة.

و يتمثل قانون حفظ الإضطراب في قانون نيوتن الثاني للحركة مطبقاً على حجم التحكم:

"معدل تغير الإضطراب داخل حجم التحكم زائداً خالص معدل سريان الإضطراب إلى خارج حجم التحكم بانتقال الكتلة يعادل مجموع القوى المؤثرة على المائع".



الشكل 2.7

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

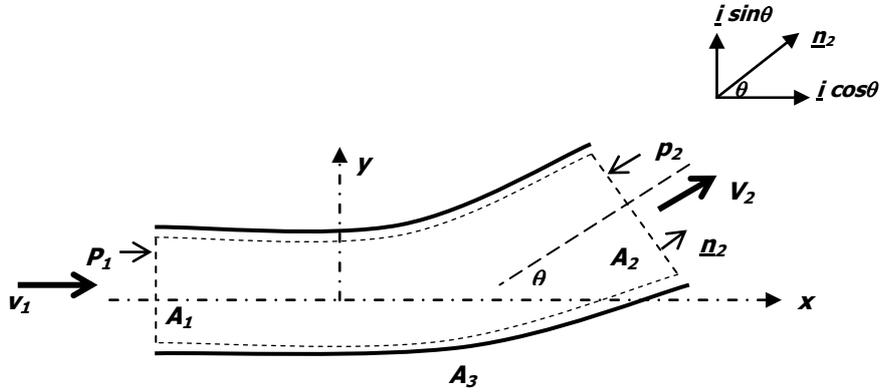
$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \dots\dots\dots(2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد $\underline{\sigma}$ يساوي مجموع المتجهين $-\rho \underline{n}$ و $\underline{\tau}$. كما أن \underline{B} هي القوة الجسمية على

وحدة حجمية و تتمثل في الحال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمية أي $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$.

القوة الناشئة عن السريان داخل أنبوب منحنى

نسعى هنا للاستفادة من معادلة حفظ الإضطراب (2.12) لتقدير القوة على الأنبوب المنحني نتيجة لسريان رتيب لاإنضغاطي أحادي البعد - الشكل 2.8 .



الشكل 2.8

نفترض كذلك استواء الخط المركزي للأنبوب على المستوى $x-y$. بتطبيق هذه الافتراضات على المعادلة (2.12) تؤدي رتبة السريان إلى إلغاء الحد الأول. و يعطي الحد الثاني:

$$\iint_A \rho v \underline{v} dA = -\rho v_1^2 A_1 \underline{i} + \rho v_2^2 A_2 \underline{n}_2 = -\rho v_1^2 A_1 \underline{i} + \rho v_2^2 A_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j})$$

و الحد الثالث :

$$\iiint_V B dV = \iiint_V -\rho g \underline{k} dV = -\rho g V \underline{k}$$

عند تطبيق الحد الرابع على السطحين (1) و (2) نراعي أن مركبة القص عليهما تساوي الصفر. بالتالي يُمثّل الحد الرابع بالضغط وحده. أما على السطح المنحني (3) فكلاً من القص والضغط ذوا قيم غير صفرية، إلا أن توزيعهما على السطح غير منتظم. ويمكن استخلاص تأثيرهما سوياً كرد فعل \underline{R} من السطح (3) على حجم التحكم.

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$\begin{aligned} \iint_A \underline{\sigma} dA &= \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 dA_3 \\ &= \iint_{A_1} p_1 dA_1 \underline{i} + \iint_{A_2} -p_2 dA_2 (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}) + \underline{R} \\ &= p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \end{aligned}$$

و تصبح معادلة حفظ الإضطراب

$$\begin{aligned} -\rho v_1^2 A_1 \underline{i} + \rho v_2^2 A_2 \cos \theta \underline{i} + \rho v_2^2 A_2 \sin \theta \underline{j} \\ = -\rho g \underline{k} + p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \cos \theta \underline{i} - p_2 A_2 \sin \theta \underline{j} + R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \end{aligned}$$

تُعطي المعادلة المتجهة أعلاه ثلاث معادلات مقدارية للحركة في الاتجاهات x, y, z .

$$R_x = \dot{m} (v_2 \cos \theta - v_1) + p_2 A_2 \cos \theta - p_1 A_1$$

$$R_y = \dot{m} v_2 \sin \theta + p_2 A_2 \sin \theta$$

$$R_z = \rho g V$$

وبالرمز لقوى المائع على الأنبوب في الاتجاهات الثلاث بـ F_z , F_y , F_x

$$F_x = \dot{m} (v_1 - v_2 \cos \theta) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta \dots\dots\dots(2.13a)$$

$$F_y = -\dot{m} v_2 \sin \theta - p_2 A_2 \sin \theta \dots\dots\dots(2.13b)$$

$$F_z = -\rho g V \dots\dots\dots(2.13c)$$

مثال 2.3

أحسب القوى في الاتجاهات x , y , z على كوع قائم الزاوية حجمه الداخلي 2 لتر و قطر مقطعه 100mm نتيجة لسريان زيت كثافته 850kg/m^3 بمعدل 30 l/s إذا عُلم أن الضغط في مقطع الدخول 0.20MPa والضغط في مقطع الخروج 0.19MPa. أعتبر أن محور الكوع يُطابق المستوى $x-y$ - (الشكل 2.9).

تُطابق الافتراضات في هذا المثال افتراضات المعادلات (2.13)

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 = 7.85E-3 \text{ m}^2$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (850)30E-3 = 25.5\text{kg/s}$$

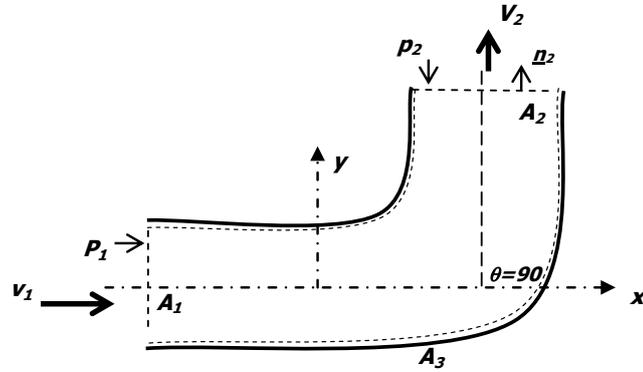
$$v_1 = v_2 = \dot{V} / A = 30E-3 / 7.85 E-3 = 3.82 \text{ m/s}$$

و الزاوية θ لهذه الحالة تساوي 90°

$$\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

و بذلك تعطي المعادلات (2.13)

$$F_x = 1668\text{N}, \quad F_y = -1590\text{N}, \quad F_z = -17\text{N}.$$



الشكل 2.9

مسائل

2.1 أنبوب دائري المقطع نصف قطره R_1 موصل على التوالي بأنبوب أصغر نصف قطره R_2 . توزيع سرعة السريان في الأنبوب (1) يرتبط بالمسافة الإشعاعية r حسب العلاقة

$$v = b \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]$$

حيث b ثابت . أحسب :

(أ) معدل السريان الحجمي

(ب) السرعة العليا في الأنبوب (1)

(ج) متوسط السرعة في الأنبوب (2) $\left[\frac{1}{2} \pi b R_1^2, b, \frac{b}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]$

2.2 يُعبّر عن مُركبات السرعة u و v في الاتجاهين x و y لسريان لاإنضغاطي بالمعادلتين:

$$u = b(x^2 + xy - y^2)$$

$$v = b(-2xy - 2yz + 2z^2)$$

حيث b ثابت. بتحقيق حفظ الكتلة استخلص مركبة السرعة في الاتجاه z ، علماً بأن محصلة السرعة عند نقطة الأصل تساوي صفر. $[b(z^2 - yz)]$

2.3 سريان غير رتيب أحادي البعد سرعة التيار فيه u حيث $u = u(x, t)$ ، يعبر فيه عن الكثافة ρ بالمعادلة

$$\rho = \rho_0 (2 - \cos \omega t)$$

حيث ρ_0 و ω ثوابت.

$$\left[U - \frac{\omega x \sin \omega t}{2 - \cos \omega t} \right]$$

حدد العلاقة $u = u(x, t)$ إذا كانت $u(0, t) = U$.

2.4 يوضح الشكل (2.10) أنبوب يستخدم لنقل سائل كثافته

930 kg/m^3 . الضغط المقياسي عند المقطع (1) 2.0 kPa و عند

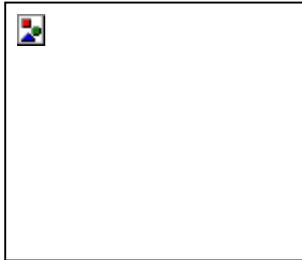
المقطع (2) ضغطاً جويّاً. مساحة المقطع العرضي (1) 0.016 m^2 و

المقطع (2) 0.01 m^2

أحسب السرعة عند المقطعين (1) و (2) ومعدل السريان الحجمي

متجاهلاً الاحتكاك و الفواقد الأخرى.

$[3.9 \text{ m/s}, 6.3 \text{ m/s}, 63 \text{ l/s}]$



الشكل 2.10

2.5 يوضح الشكل (2.11) مستودع لسائل يجري إفراغه بخرطوم قطره 50مم. متجاهلاً اللزج وغيره من الفواقد أحسب معدل السريان الحجمي. ما هي الزيادة المطلوبة في المسافة الرأسية للخرطوم ليصل معدل السريان إلى 20.0 لتر/ثانية؟

[17.4 l/s, 1.27m]



الشكل 2.11

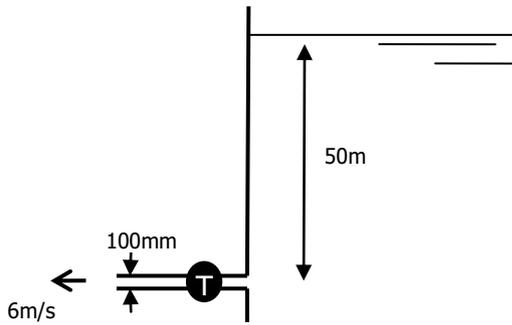
2.6 تستخدم مضخة لضخ منتج نفطي كثافته النسبية 0.86

بمعدل 35 l/s . القطر الصعيدي للأنبوب 200mm والقطر السافلي 150mm . سمت الضغط الفراغي

صعيد المضخة 1.5m وسمت الضغط القياسي سافل المضخة يساوي 15m . أحسب

(أ) السمت الناتج من المضخة (ب) القدرة المنتقلة من

المضخة للمنتج النفطي. [16.6m, 4.9kW]

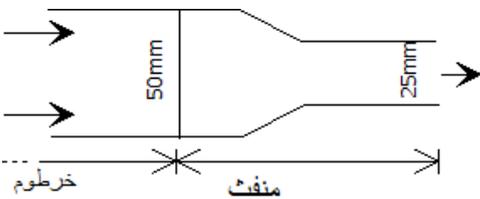


الشكل 2.12

2.7 الشكل (2.12) يوضح خزان مياه. أحسب القدرة

الداخلية للنفثة T في مخرج الخزان، متجاهلاً الفواقد.

[22.3kW]



الشكل 2.13

2.8 يوضح الشكل (2.13) مقدمة خرطوم إطفاء.

باعتبار أن السمت الكلي القياسي المستخدم يساوي

100m أحسب مقدار واتجاه القوة الناتجة عن المنفت

[1.1kN]

على أيدي رجل الإطفاء .

2.9 يسري ماء عبر كوع صافي انحناءه 180° إلى الجو . مساحة مقطع الدخول 0.0025m² و

مساحة مقطع الخروج 0.0005m² . السرعة في مقطع الدخول 30m/s . متجاهلاً الفواقد وأثر الجاذبية

[40.5kN, 0]

أحسب مقدار القوة اللازمة لتثبيت الكوع و حدد اتجاهها .

3 التحليل البُعدي و النمذجة

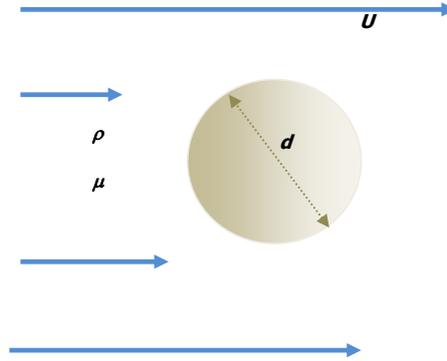
3.1 أسس التحليل البُعدي

يبدأ عادةً تحليل المسألة الهندسية بوضع الأنموذج الرياضي المبني على المعادلات ذات الصلة والتي تشمل قوانين الحفظ و العلاقات الثانوية. و من ثم السعي لحل هذا الأنموذج والحصول على فهم كامل للحالة الهندسية المدروسة.

إلا أن هناك قطاع كبير من المسائل الهندسية لا يمكن بلوغ الفهم الوافي لدوالها بالنمط النظري الخالص. و يلزم بالتالي إجراء تجارب معملية لإدراك ما لم يُدرك بالطرق النظرية. في ميكانيكا الموائع يتمثل ذلك بصفة خاصة في كل ما يتعلق بقوة الإعاقة و حركة السريان المائع.

التجربة إذن تشكل رافداً مهماً من روافد التحليل الهندسي. و نهدف من هذا الباب إلى التبصير بالأسس التي تنظم التجربة. على وجه التحديد أسس تسمية العدد الأدنى من المتغيرات التي ينبغي إجراء التجارب فيها.

و سنتخذ مثلاً تصويرياً نوضح من خلاله الأسس المذكورة و هو مسألة الإعاقة الناتجة عن سريان مائع عبر كُرة .



الشكل 3.1: سريان عبر كُرة

معلومٌ عن هذه الحالة أن قوة الإعاقة D على كرة مستقرة في تيار رتيب تتأثر بسرعة التيار U و لزوجة المائع μ و كثافته ρ و قطر الكرة d ، وبذلك

$$f(D, d, U, \rho, \mu) = 0$$

الأسلوب البسيط للحصول على العلاقة بين الإعاقة D والمتغيرات الأربعة الأخرى معتمداً على قيم ثلاثة من العناصر الأربعة و إجراء تجربة لتحديد تعبير D مع العنصر الرابع. ثم تكرار التجربة لعلاقة D مع العناصر الثلاثة الأخرى كُلياً على حدة.

و نلاحظ صعوبة هذا الأسلوب المباشر في العمل التجريبي للآتي:

(1) يحتاج لجهد كبير و وقت طويل إذا كثرت عدد العناصر

(2) صعوبة أو استحالة تثبيت بعض العناصر وترك عناصر أخرى متعلقة بها متغيرة. في المثال المطروح - مثلاً - يتم التغيير في اللزوجة عادةً بتغيير المائع. إلا أن تغيير المائع يغير في الكثافة أيضاً!

والبديل لهذا الأسلوب المباشر في التجريب هو إجراء التجارب بين مقادير لابعدية مكونة من هذه العناصر بدلاً من إجراءها على العناصر نفسها.

نحصل على المقدار اللابعدي بأن نضرب أو نقسم العناصر على بعضها البعض بحيث يصبح المقدار الناتج بغير أبعاد. عدد رينولز - على سبيل المثال - يساوي $\frac{\rho v d}{\mu}$. و تُعطي مكوناته الوحدات

$$\frac{(kg\ m^{-3})(ms^{-1})(m)}{(kg\ m^{-1}s^{-1})}$$

وتصبح بذلك وحدته 1 ، فهو بذلك مقداراً لابعدي.

كيف يمكننا إذن تحويل عناصر السريان إلى مقادير لابعدية؟ نتبع في ذلك ما يعرف بنظرية بكنغهام.

نظرية بكنغهام (نظرية Π)

"إذا شملت مسألة ما العناصر: p_1, p_2, \dots, p_n ، حيث: $f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ وشملت العناصر مجتمعة m بُعداً فإن عدد المقادير اللابعدية المستقلة تكون $(n - m)$."

عند تطبيق النظرية على مثال الإعاقة على الكرة فإن: $n = 5$ و $m = 3$. والأخيرة تشمل الطول و الكتلة و الوقت (L,M,T) ، و لا نجد في العناصر الخمسة غير هذه الأبعاد الثلاثة. يصبح بذلك عدد المقادير اللابعدية المستقلة لهذه الحالة $n - m = 2$. أي انه يمكن اختصار المتغيرات إلى اثنين بحيث $f(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ وحيث Π_1 و Π_2 مقادير لابعدية مكونة من عناصر المسألة الخمسة.

كيف يمكننا تحديد المقادير اللابعدية ؟

(1) نبدأ باختيار m عنصراً أساساً من العناصر n . تستوفي العناصر الأساس المختارة الشروط التالية :

- (أ) لا تشمل العنصر الأول p_1 .
- (ب) تشمل أبعاد العناصر المختارة مجتمعةً كل الأبعاد الأساس للسريان.
- (ج) لا يكون أي من العناصر الأساس المختارة أحد مضاعفات عنصر أساس آخر .

بالعودة إلى مثال الإعاقة على الكرة يمكن أن نختار d, U, ρ كعناصر أساس.

(2) تُكوّن $(n - m)$ معادلة بُعدية تربط العناصر الأساس بكل من العناصر الأخرى. في مثال الإعاقة على الكرة :

$$\Pi_1 = d^{a_1} U^{a_2} \rho^{a_3} D$$

$$\Pi_2 = d^{a_4} U^{a_5} \rho^{a_6} \mu$$

توازُن الأبعاد في المعادلة الأولى يعني

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_1} \left(\frac{L}{T}\right)^{a_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_3} \left(\frac{ML}{T^2}\right)^1$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{a_3+1} L^{a_1+a_2-3a_3+1} T^{-a_2-2}$$

$$a_1 + a_2 - 3a_3 + 1 = 0$$

$$a_3 + 1 = 0$$

$$-a_2 - 2 = 0$$

$$a_1 = -2, a_2 = -2, a_3 = -1$$

$$\Pi_1 = d^{-2} U^{-2} \rho^{-1} D = \frac{D}{\rho d^2 U^2}$$

و للمعادلة الثانية

$$\Pi_2 = d^{a_4} U^{a_5} \rho^{a_6} \mu$$

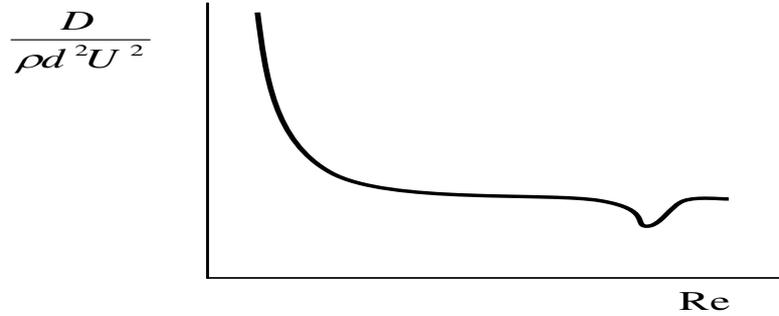
$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_4} \left(\frac{L}{T}\right)^{a_5} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_6} \left(\frac{M}{LT}\right)^1$$

$$a_4 = -1, a_5 = -1, a_6 = -1$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

و تحدد العلاقة النهائية بتجربة يرصد فيها تغير Π_1 مع Π_2 : $F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$

الشكل (3.2) يوضح نتيجة التجربة.



الشكل 3.2: نتيجة التجربة المُجرّاة للعلاقة بين Π_1 و Π_2 للسريان عبر الكرة

3.2 بعض المقادير اللابعديّة المُهمّة في ميكانيكا الموائع

(1) عدد رينولز Re

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

يبرز عدد رينولز كمقدار مهم حيثما يكون **التأثير اللزج** فاعلاً مقارنةً بالتأثيرات الأخرى. المقدار L في هذا التعريف هو طول مرجعي في الحالة المدروسة.

(2) عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث c سرعة الصوت. ويكون عدد ماخ مهماً في دراسة السريان إذا وجب اعتبار السريان **إنضغاطياً**.

(3) عدد فزود Fr

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

حيث g تسارع الجاذبية. و يكون عدد فزود مهماً حيث تكون قوة **الجاذبية** ذات قيمة مقدرّة مقارنةً بالقوى الأخرى.

3.3 النمذجة

تعني النمذجة إجراء تجارب معملية على **أنموذج** للجسم الذي يراد استخدامه في الواقع. تتبع الحاجة للنمذجة من صعوبة أو استحالة إجراء التجارب على الجسم الأصل. و تنشأ الصعوبة المذكورة لِكِبَر حجم الجسم مثلاً أو صغره في أحوال أخرى أو صعوبة إعداد الأحوال التشغيلية الملائمة. تتطلب النمذجة إذن إعداد ظروف معملية ملائمة لإجراء التجارب على الأنموذج ثم التكهّن بالظروف الفعلية للحركة عند استخدام الجسم الكامل في بيئته بُناءً على نتائج التجربة. ويسمى هذا الجسم الكامل في مرحلة التجريب **الطراز البدائي**.

تتطلب النمذجة استيفاء ما يُعرف بـ **التشابه الفيزيائي** بين الأنموذج و الطراز البدائي. ويعني هذا في ميكانيكا الموائع:

(أ) وجود تشابه هندسي بين الأنموذج و الطراز البدائي

(ب) وجود تشابه حركي بين الأنموذج و الطراز البدائي. و يؤدي التشابه الحركي إلى تساوي القُوى اللابعديّة في الجسمين.

مثال 3.1

أنموذج كرة يساوي قطره نصف قطر الطراز البدائي. يُراد استخدام الطراز البدائي في الهواء عند السرعة 15m/s، و يراد استخدام الماء في المعمل.

(أ) كم يجب أن تكون سرعة الماء لاستيفاء التشابه الحركي؟

(ب) إذا كانت قوة الإعاقة في المعمل 5N كم تكون قيمتها في حالة الطراز البدائي؟

خواص الهواء و الماء لهذه الحالة:

$$\text{Pa.s6 } \mu_a = 16E - \rho_a = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Pa.s6E-00} \mu_w = 8 \rho_w = 1E3 \text{ kg/m}^3$$

(أ) المعادلة اللابعديّة الخاصة بهذه الحالة

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2} = f\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)$$

استيفاء التشابه الحركي يعني

$$= \frac{\rho v d}{\mu} \Big|_f = \frac{\rho v d}{\mu} \Big|_b$$

حيث تشير اللاحقة / للأنموذج و اللاحقة ب للطراز البدائي.

$$v_f = v_b \frac{d_b}{d_f} \frac{\mu_f}{\mu_b} \frac{\rho_b}{\rho_f} = 15(2) \frac{800E - 6}{16E - 6} = 1.7 \text{ m/s}$$

(ب) لإيجاد الإعاقة على الطراز البدائي

$$\frac{D}{\rho v^2 d^2} \Big|_{\psi} = \frac{D}{\rho v^2 d^2} \Big|_f =$$

$$D_{\psi} = D_f \frac{\rho_{\psi}}{\rho_f} \left(\frac{v_{\psi}}{v_f} \right)^2 \left(\frac{d_{\psi}}{d_f} \right)^2 = 5 \frac{1.15}{1E3} \left(\frac{15}{1.7} \right)^2 2^2 = \mathbf{1.8N}$$



الشكل 3.3: أنموذج لمكوك فضائي بمقياس 6:1 في النفق الهوائي الخاص بشركة بوينغ للطيران

مسائل

3.1 كرة من الفولاذ قطرها d وكثافة مادتها ρ_s وضعت في مائع لزج كثافته ρ ولزوجته المطلقة μ . عقب التسارع الأولي بفعل الجاذبية g ثبتت السرعة إلى أسفل عند v . استخلص تعبيراً رياضياً يربط المقادير اللابعدية الحاكمة للسريان، مستخدماً التحليل البعدي.

$$f\left(\frac{\rho v d}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{gd}}, \frac{\rho_s}{\rho}\right) = 0$$

3.2 الفقد في الضغط Δp لسريان لاإنضغاطي في أنبوب مستقيم يعتمد على كثافة المائع ρ ، متوسط السرعة v ، قطر الأنبوب d ، طول الأنبوب L ، اللزوجة الحركية μ وارتفاع الخشونة k . استخلص تعبيراً عن Δp مستخدماً التحليل البعدي.

3.3 أنبوب قطره 15mm يستخدم لنقل الماء. لوحظ أن السريان يمور عندما ترتفع السرعة إلى 0.15m/s . كم تكون السرعة الصفائحية القصوى لسريان هواء في أنبوب قطره 50mm و ذي خشونة مماثلة لأنبوب الماء.

أعتبر $v_w = 1E-6 \text{ m}^2/\text{s}$ و $v_a = 17E-6 \text{ m}^2/\text{s}$. [0.77 m/s]

3.4 أنموذج لفاع سفينة مصغر إلى خُمس مفاستها أختبر في نفق هوائي بسريان كثافته $25\text{kg}/\text{m}^3$ و لزوجته $18.5E-6\text{Pa}\cdot\text{s}$ و بسرعة تساوي $35\text{m}/\text{s}$. قيست قوة الإعاقة على الأنموذج فكانت 65kN . قدر السرعة و الإعاقة على السفينة الكاملة في ماء البحر بكثافة تساوي $1025\text{kg}/\text{m}^3$ و لزوجة $1.65E-3\text{Pa}\cdot\text{s}$. [15.2 m/s , 12.6MN]

3.5 تطير طائرة فوق سطح البحر بسرعة $450\text{m}/\text{s}$. على أي سرعة تطير لتحقق تشابه القوى الإنضغاطية على ارتفاع: (أ) 800m (ب) 1600m ؟
تتغير درجة الحرارة مع الارتفاع على النحو :

الارتفاع (m)	0	800	1600
درجة الحرارة (K)	288	236	217

و تتغير سرعة الصوت مع درجة الحرارة على النحو: $c = \text{const} \cdot \sqrt{T}$. [407m/s, 391m/s]

4 السريان اللاإنضغاطي في الأنابيب

4.1 أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب

عند استخلاص معادلة الطاقة (2.10) تجاهلنا الأثر اللزجي للسريان بمساواة الإجهاد القصي في المعادلة الأساس للطاقة بالصفر. و على الرُغم من وجود أحوال تطبيقية تُحوّل هذا التبسيط إلا أن معظم التطبيقات الهندسية للسريان في الأنابيب تستدعي الاهتمام بالأثر اللزجي. وبذلك نحتاج إلى ترفيع المعادلة (2.10) التي تخص السريان الرتيب أحادي البعد اللازجي لتشمل **السريان اللزجي**. و تُقدم هنا بالفول أن الإضافة المطلوبة تعتمد على علاقات تجريبية في حالة السريان المائر بينما يمكن في حالة السريان الصفائحي استخلاصها من علاقات نظرية بحتة.

بدءً من المعادلة (2.10)،

$$\frac{P}{m g} = \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \right]$$

توحي المعادلة بأنه إذا أريد نقل مائع من الموضع (1) إلى الموضع (2) لمقابلة رفع يساوي $z_2 - z_1$ متر و زيادة في الضغط $p_2 - p_1$ و زيادة في السرعة من $v_2 - v_1$ فإن سمت ضخ المطلوب $P/m g$ متراً و يساوي فقط الجانب الأيمن من المعادلة. و يبدو قصور المعادلة وعدم توافقها مع الواقع إذا نظرنا في حالة سريان في أنبوب طويل وأفقى لا نحتاج فيه لرفع ولا زيادة في الضغط أو السرعة فتشير المعادلة أعلاه إلى عدم الحاجة إلى مضخة ($P=0$) وهذا ما يكذبه الواقع. و يبدو واضحاً من ذلك الحاجة إلى إضافة حدٍ رابع إلى المعادلة لمقابلة الأثر الاحتكاكي. و لأن وحدات كل الحدود طولية المتر فإن الحد المراد إضافته يكون أيضاً ذا وحدة طولية ويسمى سمت الاحتكاك h_f . وبذلك تُعدل المعادلة إلى الصورة

$$\frac{P}{m g} = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \dots\dots\dots(4.1)$$

بقي الآن تعريف h_f كدالة في متغيرات السريان الأخرى.

لتحقيق ذلك نطبق المعادلة (4.1) على سريان في أنبوب ثابت المقطع و أفقي بين موضعين (1) و (2) لا تتخللهما مضخة. فتصبح المعادلة

$$h_f = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{\Delta p_f}{\rho g} \dots\dots\dots(4.2)$$

النقصان في الضغط هنا ناتج كلياً عن الاحتكاك .
 للتمهيد لإيجاد العلاقة التجريبية المطلوبة بين Δp_f وعناصر السريان نستخدم التحليل البعدي - الباب الثالث - و نبدأ بتحديد العناصر المؤثرة :

$$\Delta p_f = f_1(\rho, v, d, L, \mu, k) \dots \dots \dots (1)$$

حيث k متوسط ارتفاع الخشونة في باطن الأنبوب.

القائمة (4.1) تبين قيم k بالمليمتر لبعض أنواع الأنابيب الأكثر استخداماً.

القائمة (4.1)

مادة الأنبوب	k(mm)	مادة الأنبوب	k(mm)
أنابيب مسحوية	0.0015	حديد زهرة مسفلت	0.12
متعدد كلوريد الفينول(PVC)	0.0030	فولاذ مخرصن	0.15
بلاستيك	000.01	حديد زهرة	0.25
فولاذ تجاري	0.0450	خرسانة	0.30 - 3.00
حديد مطاوع	0.0450	فولاذ مبرشم	1.00 - 10.00
فولاذ كربوني	0.0500		

العلاقة (1) تدل إلى أن عدد العناصر $n = 7$ وعدد الأبعاد الأساس $m = 3$ ، وهي الكتلة والطول والوقت . بذلك تكون عدد المقادير اللابعديّة المستقلة للسريان أربعة.

نتيجة التحليل البعدي لهذه الحالة - المسألة (3.2) - هي :

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = f_2 \left(\text{Re}, \frac{L}{d}, \frac{k}{d} \right)$$

تدل التجربة إلى أن $\frac{\Delta p_f}{\rho v^2}$ تتغير خطياً مع $\frac{L}{d}$

$$\frac{\Delta p_f}{\rho v^2} = \frac{L}{d} f_3 \left(\text{Re}, \frac{k}{d} \right)$$

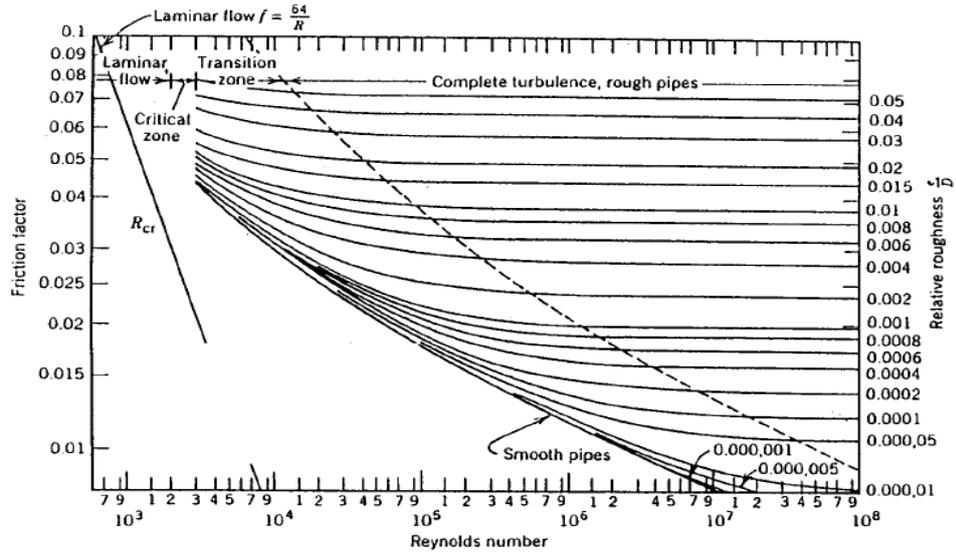
و يقتضى العرف اعتبار مقام المقدار يسار المعادلة $\frac{1}{2} \rho v^2$

$$\frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{L}{d} f \left(\text{Re}, \frac{k}{d} \right)$$

و بالرجوع إلى المعادلة (4.2)

$$h_f = \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} f \left(\text{Re}, \frac{k}{d} \right)$$

التجارب التي أجريت لتحديد الدالة $f(\text{Re}, k/d)$ أدت للنتيجة الموضحة في الشكل (4.1)، و هو ما يعرف بمخطط مودي.



الشكل 4.1: مخطط مُودي

و بالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على ما يعرف بمعادلة **دارسي**

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(4.3)$$

ينبغي التنبيه هنا إلى أن بعض المراجع تضع المعامل **4** في الجانب الأيمن للمعادلة (4.3). يتبع ذلك أن قيمة f في تلك المراجع تعادل ربع قيمتها هنا.

الملحق (ج) به قائمة عديدة تعطي معامل الاحتكاك f بدلالة Re و k/d . كما يمكن - كأسلوب بديل - استخدام العلاقات الرياضية الآتية لحساب قيمة f .

(أ) للسريان الصفائحي

$$f = \frac{64}{Re} \dots\dots\dots(4.4)$$

وهذه المعادلة مستخلصة نظرياً ومُثبتة بالتجربة .

(ب) معادلة كولبروك – وايت للسريان المائري

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left(\frac{k/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(4.5)$$

يمكن ملاحظة التعقيد الناشئ عن أن f تظهر في كلٍ من جانبي المعادلة.

(ج) معادلة سوامي للسريان المائري

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(0.27 \frac{k}{d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \dots\dots\dots(4.6)$$

معادلة سوامي أسهل استخداماً من معادلة كولبروك - وايت ونسبة الخطأ فيها لا تتجاوز 2% إذا كانت قيم k/d و Re في الحدود

$$10^{-6} \leq k/d \leq 10^{-2}$$

$$5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$$

4.1 مثال

أنبوب من الفولاذ التجاري قطره 250mm به سريان ماء بمعدل $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ و بدرجة حرارة 35°C .

(أ) قيّر الفقد في السميت والنقصان في الضغط لمسافة أفقية 100m .

(ب) كم يكون معدل السريان الأعلى إذا اشترط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m ؟

(أ) معادلة دارسي (4.3)

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} 0.25^2} = 2.04 \text{ m/s}$$

من قائمة خواص الماء عند 35°C :

$$\nu = 0.727 \text{E-6 m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 994.1 \text{ kg/m}^3$$

$$Re = \nu d/\nu = 700,000$$

و هذا يعني أن السريان مائري.

$$k/d = 0.045E-3 / 0.25 = 0.00018$$

باستخدام معادلة سوامي (4.6)

$$f = 0.015$$

$$= \mathbf{1.3m} h_f = 0.015 \frac{100}{0.25} \frac{2.04^2}{2(9.81)}$$

Δp_f = النقصان في الضغط

$$\Delta p_f = \rho g h_f = 994.1(9.81)1.3 = \mathbf{12.3kPa}$$

(ب) باشتراط ألا يزيد الفقد الاحتكاكي عن 1m فان معادلة دارسي تتخذ الصورة:

$$1.0 = f \frac{100}{0.25} \frac{v^2}{2(9.81)} = 20.39 f v^2$$

$$f v^2 = 0.049 \dots\dots\dots(1)$$

نسبةً لاعتماد f على السرعة v فان حل المعادلة (1) يحتاج لأسلوب تكراري. و يمكن البدء بافتراض سريان مفرط التمرور لا تعتمد f فيه على عدد رينولز، و من ثم السرعة. و يمكن من قوائم السريان الاحتكاكي الحصول على قيمة f لهذه الحالة بمعرفة الخشونة اللابعدية فقط.

عند هذا الافتراض الابتدائي $f = 0.0134$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على $v = 1.91 \text{ m/s}$

و يمكن الآن الدخول للتقريب الثاني بحساب عدد رينولز ثم المعامل f

$$f = 0.015 \text{ Re} = 6.6E5 ,$$

و بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على $v = 1.81 \text{ m/s}$

في التقريب الثالث نحصل على نفس النتيجة عند التقريب لمنزلتين عشريتين. و يعني هذا أن السرعة الصحيحة هي 1.81 m/s . و بالتالي معدل السريان الأعلى الممكن هو $\mathbf{0.089 \text{ m}^3/\text{s}}$.

مثال 4.2

أنبوب من الفولاذ المخرضن قطره الداخلي 78mm وطوله 200m ينقل الماء عند درجة الحرارة 25°C بمعدل 7 l/s من الموضع (1) إلى الموضع (2) حيث يرتفع الموضع الثاني عن الأول بمقدار 2m . سمت الضغط عند الموضع (1) يساوي 1.0m (فراغي) و الضغط جوي عند الموضع (2) . المطلوب حساب القدرة الخارجة من المضخة.

(عند 25°C : $\rho = 997.1 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.897E-6 \text{ m}^2/\text{s}$)

معادلة الطاقة (4.1) تعطي

$$P = m \square g \left[(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \right]$$

تساوي المساحات A_1 و A_2 يعني $v_1 = v_2$

$$\rho q = (997.1)(7E-3) = m$$
$$/4.78E-3 = 1.46 \text{ m/s} \quad 0.007v = q/A =$$

$$127,000 Re = vd/\nu =$$

$$k/d = 0.15 / 78 = 0.0019$$

$$f = 0.025$$

$$= 6.88 \text{ m } h_f = f \frac{L v^2}{d 2g}$$

$$P = 6.98(9.81)[2.0 + 1.0 + 6.88] = \mathbf{0.68kW}$$

4.2 الفقد الموضعية في الأنابيب

تُعنى هنا بالفواقد في الطاقة الناشئة عن الانحناءات والعوائق في مسار المائع. و على نحو ما فعلنا للفقد الاحتكاكي نعدل هنا المعادلة (4.1) بإضافة سمت للفقد الموضعي h_l

$$\dots\dots\dots(4.7) \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f + h_l$$

تدل التجارب على أن الفقد الموضعي h_l يمكن تقديره بالعلاقة العامة :

$$h_l = C_l \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(4.8)$$

تحدد C_l لكل نوع من أنواع العوائق بالتجربة . الشكل(4.2) يوضح قيم C_l التقريبية لبعض العوائق المألوفة.

	جلبة	كوع 180°	كوع 90°	صمام بوابي (مفتوح)	صمام كُرّي (مفتوح)
	ناشر قائم الزاوية		مخرج نافذ		مخرج قائم الزاوية

الشكل 4.2

مثال 4.3

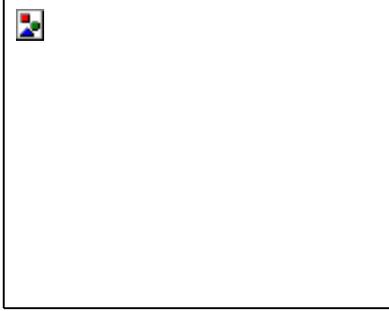
في الشكل (4.3) الأنبوب A-B من الفولاذ التجاري قطره 150mm وطوله 10m . الصمام المستخدم صمام بوابي مفتوح تماماً. معدل السريان 50 l/s واللزوجة

$$\text{الكينماتية } 0.8E-6 \text{m}^2/\text{s}$$

المطلوب حساب:

(أ) الفقد الكلي في السميت

(ب) ارتفاع الماء فوق الخط المركزي للأنبوب.



الشكل 4.3

باتخاذ المقطع (1) على سطح السائل في المستودع والمقطع (2) عند مخرج الأنبوب

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$v_1 = 0$$

بالرجوع لمعادلة الطاقة (4.7)

$$P = 0, \quad z_1 - z_2 = \Delta z$$

$$\Delta z = \frac{v_2^2}{2g} + h_f + h_l \dots \dots \dots (1)$$

$h_f + h_l$ = الفقد الكلي في السميت

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{q}{A} = \frac{0.05}{0.0177} = 2.83 \text{ m/s}$$

$$Re = vd/\nu = 0.53E6$$

(سريان مائتر)

$$k/d = 0.045 / 150 = 0.0003$$

$$f = 0.016$$

$$= 0.44 \text{m } h_f = 0.016 \frac{10}{0.15} \frac{2.83^2}{2(9.81)}$$

$$= [0.5 + 0.2] \frac{2.83^2}{2(9.81)} = 0.29 \text{m } h_l = \left(\sum C \right) \frac{v^2}{2g}$$

(أ) الفقد الكلي في السميت $h_f + h_l$

$$= 0.44 + 0.29 = \mathbf{0.73 \text{m}}$$

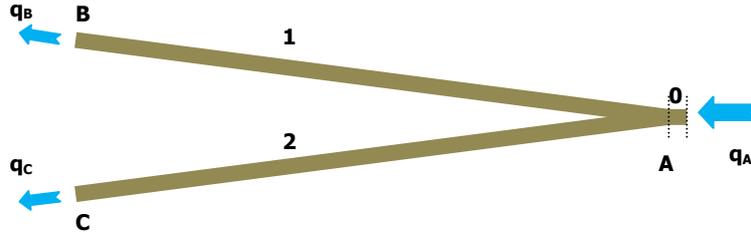
(ب) Δz ، المعادلة (1)

$$+ 0.73 = 0.41 + 0.73 = \mathbf{1.14 \text{m}} \quad \Delta z = \frac{2.83^2}{2(9.81)}$$

4.3 الأنابيب المتفرعة

4.4 مثال

يوضح الشكل (4.4) منظومة أنابيب متفرعة. الأنبوب 0 يتفرع إلى الأنبوبين 1 و 2 أفطارهما d_1 و d_2 و أطوالهما L_1 و L_2 وارتفاعي الخشونة فيهما k_1 و k_2 . نقطة التفرع هي A ونقاط الخروج B و C. الضغط عند النقطتين B و C جوي - أي صفر مقياسياً.



الشكل 4.4

إذا كان معدل السريان عند الموضع A يساوي q_A المراد معرفة:

(أ) معدلي السريان في الفرعين 1 و 2.

(ب) الضغط المطلوب في الموضع A.

(أ) معادلة الطاقة بين الموضعين B و A

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + h_{f1}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = h_{f1} \dots \dots \dots (1)$$

و بين الموضعين C و A

$$\frac{p_A}{\rho g} = h_{f2} \dots \dots \dots (2)$$

وبذلك

$$h_{f1} = h_{f2} \dots \dots \dots (3)$$

باستخدام علاقة دارسي

$$f_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} = f_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1/2}} \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \dots \dots \dots (4)$$

حفظ الكتلة :

$$q_A = q_B + q_C = \frac{\pi}{4} (d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2)$$

$$v_1 = \frac{4q_A}{\pi d_1^2} - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 \dots\dots\dots(5)$$

المعادلتان (4) و (5) كافيتان للحل لأن المتغيرين f_2 و f_1 دوال في السرعتين v_1 و v_2 . ولأن f_1 و f_2 دوال غير بسيطة يفضل إجراء الحل تكرارياً.

مُعطيات عددية:

d_1	d_2	k_1	k_2	L_1	L_2	q_A	ν	ρ
0.1m	0.2m	0.04mm	0.04mm	100m	100m	0.1m ³	0.9E-6m ² /s	1000kg/m ³

باستخدام المعطيات أعلاه تُعطي المعادلة (4)

$$v_2 = 1.414 \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} v_1 \dots\dots\dots(6)$$

و تُعطي المعادلة (5)

$$v_1 = 12.73 - 4v_2 \dots\dots\dots(7)$$

المعادلتان (6) و (7) تعطيان

$$v_2 = \frac{18.00}{5.66 + \sqrt{\frac{f_2}{f_1}}} \dots\dots\dots(8)$$

يمكن البدء بافتراض قيمة للسرعة v_2 ثم حساب v_1 من المعادلة (7). يلي ذلك حساب عددي رينولز و معاملي الاحتكاك للأنبوين 1 و 2. و يمكن ذلك من حساب قيمة أفضل للسرعة v_2 من المعادلة (8). و يستمر التقريب حتى تتساوى القيم المتوالية للسرعتين كما هو مبين في القائمة أدناه و في مستوى التقريب المطلوب.

التقريب	v_2	v_1	Re_1	Re_2	f_1	f_2
1	1.00	8.73	970E+3	222E+3	0.0166	0.0169
2	2.70	1.93	215E+3	600E+3	0.0182	0.0153
3	2.74	1.78	198E+3	608E+3	0.0184	0.0153
4	2.74	1.77	197E+3	609E+3	0.0184	0.0153
5	2.74	1.77				

و تدل القائمة أعلاه إلى أن السرعة في الأنبوين المتفرعين

$$v_1 = 1.77 \text{ m/s}, v_2 = 2.74 \text{ m/s}$$

وبذلك

$$. q_B = 0.014 \text{ m}^3/\text{s}, q_C = 0.086 \text{ m}^3/\text{s}$$

(ب) لحساب الضغط المطلوب عند الموضع **A**:
بإعادة صياغة المعادلة (1) و ملاحظة أن الضغط عند **B** جوي و يعادل الصفر مقياسياً

$$\frac{p_A}{\rho g} = h_{f1}$$

$$= 2.9m h_{f1} = f_1 \frac{L_1 v_1^2}{d_1 2g}$$

$$= (1000)(9.81)(2.9) = \mathbf{28.5kPa} \quad p_A = \rho g h_f$$

مسائل

4.1 خط أنابيب أفقي من الحديد الزهرة قطره الداخلي 250mm ينقل نفطاً خاماً درجة حرارته 30°C بمعدل 50 l/s . قَدِّر الفقد في السمْت بسبب الاحتكاك للكيلومتر الواحد. (عند درجة الحرارة 30°C خذ لزوجة النفط $7.5\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$).
[5.1m]

4.2 أنبوب أفقي من الحديد المُخرَصن قطره 50mm و طوله 100m ينقل ماءً في درجة الحرارة 40°C بمعدل 1.0 l/s .
(أ) وضح أن السريان في المدى الحرج لعدد رينولز.
(ب) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان صفائحيًا.
(ج) أحسب الفقد الاحتكاكي إذا كان السريان مائراً .
[0.3m, 0.5m]

4.3 يراد ضخ كيروسين درجة حرارته 30°C عبر أنبوب قطره 300 mm وخشونته 0.25mm لمسافة 1500m بمعدل $0.1\text{m}^3/\text{s}$. يمكن اعتبار الضغط متساوي عند مدخل ومخرج الأنبوب. قدر القدرة المطلوبة من المضخة. (عند 30°C خذ كثافة الكيروسين $800\text{kg}/\text{m}^3$ ولزوجته $2\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$).
[8.2 kW]

4.4 يسري سائل في أنبوب أفقي ناعم قطره 15mm . قيس سمْت الضغط في صعيد قطاع من الأنبوب طوله 50m و وجد مكافئاً لـ 12m من السائل، و عند المخرج مساوياً للضغط الجوي. باعتبار اللزوجة الكينماتية تساوي $1\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$ أحسب معدل السريان الحجمي.
[0.3 l/s]

4.5 المعطيات أدناه خاصة بخط أنابيب يمد محطة قَرْي للتوليد الحراري بمياه التبريد:

400mm	قطر الأنبوب
1mm	متوسط ارتفاع خشونة باطن الأنبوب
13km	طول الأنبوب
130 l/s	معدل السريان
26m	فرق الارتفاع
-4.0m	سمت الضغط صعيد المضخة
20m	سمت الضغط عند مخرج الأنبوب

بافتراض أن كثافة الماء $1000\text{kg}/\text{m}^3$ و لزوجته الكينماتية $0.9\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$ أحسب:

(أ) سمْت الفقد الاحتكاكي

(ب) السمْت الكلي للمضخة

(ج) القدرة التي يكتسبها الماء من المضخة.

[44.9m, 52.4m, 66.9kW]

يمكن تجاهل ألفوا قد الثانوية.

4.6 يصل بلدتي هجليج و صمت الجزء الرئيس من الخط الناقل للنفط الخام. تقع هجليج على ارتفاع 400m فوق سطح البحر و صمت على ارتفاع 930m . المسافة بين الموقعين 1400km تقريباً. القطر الداخلي للأنبوب 0.7m . بافتراض أن السريران نيوتوني و أن معدله $0.35\text{m}^3/\text{s}$ و كثافة النفط $860\text{kg}/\text{m}^3$ و لزوجته $20\text{E}-6\text{m}^2/\text{s}$ و متوسط ارتفاع خشونة الأنبوب 50E-6m أحسب:

(أ) سمت الفقد الاحتكاكي

(ب) السمت الكلي المطلوب

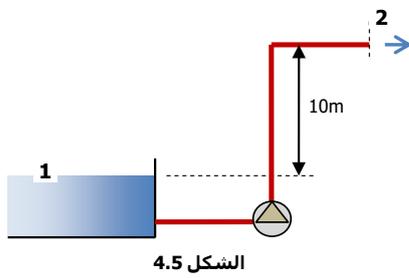
(ج) قدرة الضخ الكلية المطلوبة.

[1962m, 2492m, 7.4MW]

يمكن تجاهل ألفوا قد الثانوية.

4.7 أنبوب ناشر قائم الزاوية قصير الطول قطره الصعيدي 0.35m وقطره السافلي 0.7m يسري فيه الماء بمعدل $0.3\text{m}^3/\text{s}$. ضغط الماء في الجانب الصعيدي 5.0kPa . باعتبار كثافة الماء $1000\text{kg}/\text{m}^3$ أحسب الفقد في السمت بسبب الناشر و أحسب الضغط في الجانب السافلي منه.

[0.28m, 6.8 kPa]



4.8 يوضح الشكل (4.5) منظومة ضخ تستخدم لرفع زيت عبر أنبوب قطره 50mm وطوله 100m وخشونته 0.1mm بمعدل 5 l/s . كثافة الزيت $870\text{kg}/\text{m}^3$ و لزوجته الحركية $0.008\text{Pa}\cdot\text{s}$.

(أ) أحسب القدرة المطلوبة من المضخة.

(ب) أحسب النسبة المئوية للخطأ في إجابتك عند تجاهل

[1.35kw, 1.3%]

الفوائد الموضعية.

4.9 يُعرف ما يلي عن منظومة أنابيب بفرعين (1) و (2):

$$d_1 = 200\text{mm}, \quad d_2 = 100\text{mm}$$

$$k_1 = k_2 = 0.2\text{mm}$$

$$L_1 = L_2 = 15\text{m}$$

عند مخرج الأنبوب (2) صمام ذو كرة مفتوح كلياً. المعدل الكلي للسريران عند نقطة التفرع 100 l/s وتساوي اللزوجة الكينماتية للسائل $8.5\text{E}-7\text{m}^2/\text{s}$

(أ) أحسب معدل السريران في الأنبوبين.

(ب) أحسب معدل السريران إذا أستبعد الصمام.

[92.3 l/s ; 7.7 l/s ; 86.2 l/s ; 13.8 l/s]

5 ميكانيكا الموائع عند الاتزان النسبي

5.1 المعادلة الأساس

يُعطى هذا الباب ميكانيكا الموائع عندما يكون ممكناً اعتبار أن الحركة النسبية بين عناصر المائع معدومة. ويشمل ذلك ما يعرف بسكون الموائع كما يشمل حركة المائع كوحدة واحدة وبتسارع ثابت. وبالنظر إلى معادلة حفظ الإضطراب (2.12) فإن الاتزان النسبي يعني أن المقدار المُعَيَّر عن سريان

$$\iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \text{ أي } \text{الصفر، تساوي الصفر، أي } \cdot$$

كما أن الإجهاد القِصِّي يساوي الصفر، فتصبح مُحصلة الإجهاد $\underline{\sigma} = -p\underline{n}$ وتُضيف الافتراض الخاص بلاإنضغاطية السريان فتصبح المعادلة (2.12)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iiint_V \rho g \underline{k} dV + \iint_A p \underline{n} dA = 0$$

وبالرمز لمتجه التسارع ب $\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$

$$\iiint_V \rho \underline{a} dV + \iiint_V \rho g \underline{k} dV + \iint_A p \underline{n} dA = 0$$

و باستخدام نظرية التباعد - الملحق ب :

$$\iint_A p \underline{n} dA = \iiint_V \nabla p dV$$

فتصبح معادلة الإضطراب

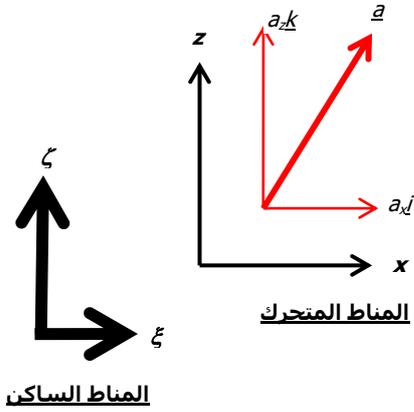
$$\iiint_V [\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p] dV = 0$$

وبما أن حجم التحكم V اختياري ونتيجة التكامل صفر:

$$\rho \underline{a} + \rho g \underline{k} + \nabla p = 0 \dots\dots\dots(5.1)$$

5.2 توزيع الضغط في مجال ثنائي البعد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت

ندرس هنا حركة حاوية تتحرك بتسارع ثابت \underline{a} بالنسبة للمناط الساكن $\zeta - \xi$. بالمقابل المناط $x-z$ مثبت على الحاوية المتحركة.



الشكل 5.1

بما أن التسارع ثابت

المقدار $\xi = a_x t + c_1$ ثابت، المقدار $\zeta = a_z t + c_2$ ثابت

بالتعويض في المعادلة (5.1)

$$\rho(a_x \underline{i} + a_z \underline{k} + g \underline{k}) + \frac{\partial p}{\partial \xi} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \underline{k} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(a_z + g) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x$$

استخلصت المعادلتان أعلاه بالنسبة للمناط الثابت $\zeta - \xi$. لتحويلهما للمناط المتحرك $x-z$ يلاحظ الآتي:

$$\dot{\xi} = a_x t + c_1$$

باعتبار السرعة = 0 عند $t = 0$ $c_1 = 0$

$$\xi = \frac{1}{2} a_x t^2 + c_2$$

و باعتبار أن المنطين يتطابقان عند بدء الحركة $c_2 = x$

$$\xi = x + \frac{1}{2} a_x t^2$$

وبالمقابل

$$\zeta = z + \frac{1}{2} a_z t^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho a_x \dots\dots\dots(5.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho(g + a_z) \dots\dots\dots(5.2b)$$

و بمكاملة (5.2a)

$$\begin{aligned} p &= -\rho a_x x + f(z) \\ &= f(z) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

(5.2b) تعطى

$$f'(z) = -\rho(g + a_z)$$

$$f = -\rho(g + a_z)z + c$$

$$p = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z + c \dots\dots\dots(5.3)$$

وهي معادلة توزيع الضغط . وتحدد قيمة الثابت c من القيم الحدودية.

معادلة سطح السائل

تدل التجربة إلى أن سطح السائل يكون مستوياً مستقيماً ومائلاً في حال تعرض الحاوية لتسارع ثابت. نتقصى هنا ما يدل عليه التحليل النظري في المعادلة (5.3).

$$p = p_a , z = z_s$$

حيث p_a الضغط الجوي و z_s قيمة z عند سطح السائل .

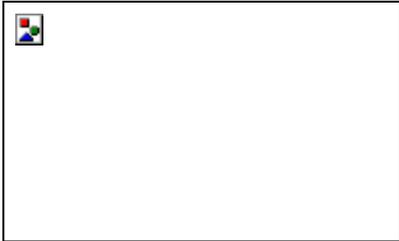
$$p_a = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z_s + c$$

$$z_s = c' - \frac{a_x}{g + a_z} x \dots\dots\dots(5.4)$$

وهو خط مستقيم ميله $-\frac{a_x}{g + a_z}$.

مثال 5.1

حاوية تحوي زيتاً كثافته 850 kg/m^3 وتتحرك بتسارع ثابت 2.0 m/s^2 في اتجاه x الموجب - الشكل 5.2 . طول الحاوية 3.0 m . لوحظ أن أدنى مستوى للزيت 2.0 m فوق القاع. أستخلص:



الشكل 5.2

(أ) معادلة توزيع الضغط.

(ب) مقدار وموضع أعلى ضغط على الحاوية.

(ج) معادلة سطح الزيت وزاوية ميله.

(أ)

$$a_x = 2.0 \text{ m/s}^2, a_z = 0, \rho = 850 \text{ kg/m}^3$$

المعادلة (5.3) تعطي

$$p = -850(2.0)x - 850(9.81)z + c_1 = -1700x - 8340z + c_1$$

$$777c_1 = 21 , x = 3 , z_s = 2 , p = 0$$

معادلة توزيع الضغط :

$$p = (21.8 - 1.7x - 8.34z) 1000$$

(ب) معادلة توزيع الضغط تعطي موضع الضغط الأعلى : $x = 0 , z = 0$.

$$\text{أعلى مقدار للضغط} = 21.8 \text{ k Pa}$$

(ج) المعادلة (5.4) تعطي سطح السائل z_s .

لحساب قيمة ثابت المعادلة

$$z_s = - (2/9.81)x + c_2 = - 0.2x + c_2$$

$$\text{عند } x = 3 , z_s = 2 , c_2 = 2.6$$

$$z_s = 2.6 - 0.2x$$

$$\theta = -11.3^\circ$$

$$\text{ميل السطح } -0.2 , \tan\theta = -0.2$$

5.3 توزيع الضغط في سائل ساكن

سكون السائل يعني أن التسارع \underline{a} في المعادلة (5.1) يساوي الصفر. فتصبح المعادلة

$$\rho g \underline{k} + \nabla p = 0$$

$$\rho g \underline{k} + \frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = 0$$

وهذا يعني أن p لا تعتمد على x أو y

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

z هو المحور الرأسى ويكون موجياً في الاتجاه المضاد للجاذبية.

ونعريف البعد h موجياً في الاتجاه المضاد لـ z ونقطة الأصل فيه عند سطح السائل. وبذلك فإن قيمة h هي العمق. و بالتالي

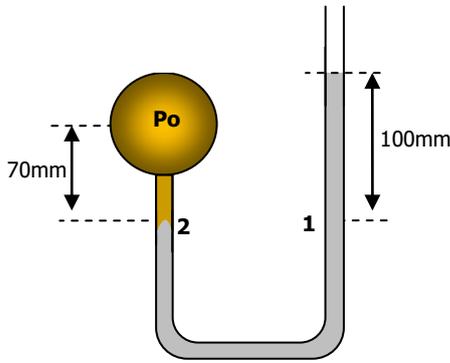
$$dh = -dz$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = \rho gh + c.$$

وباعتبار الضغط جوي عند السطح $c = p_a$

$$p = \rho gh + p_a \dots \dots \dots (5.5)$$



الشكل 5.3

مثال 5.2

يستخدم مضغط زيتي بقياس ضغط زيت يسري في أنبوب. الكثافة النسبية للزيت و الزيتق 0.85 و 13.6 .

(أ) قدر الضغط المقياسي في الخط المركزي للأنبوب.

(ب) قدير الضغط المطلق في الخط المركزي للأنبوب إذا

كانت قراءة البارومتر 0.75m

(ج) إذا استخدم مضغط مائي كم يكون الفرق في

ارتفاعات السائل المضطاطي؟

الضغط عند الموضع (1) = الضغط عند الموضع (2)

باستخدام المعادلة (5.5) عند الموضعين

$$p_0 + 0.07 \rho_0 g = p_a + 0.1 \rho_m g$$

$$p_0 + 0.07(0.85E3)9.81 = p_a + 0.1(13.6E3)9.81$$

$$p_0 = 12.8E3 + p_a$$

(أ) الضغط المقياسي في مركز الأنبوب = **12.8 kPa**

(ب) الضغط البارومتري = $h_b \rho_m g = 0.75 (13.6E3)9.81 = 0.1 \text{MPa}$

الضغط المطلق = $100E3 + 12.8E3 = \mathbf{112.8 \text{ kPa}}$

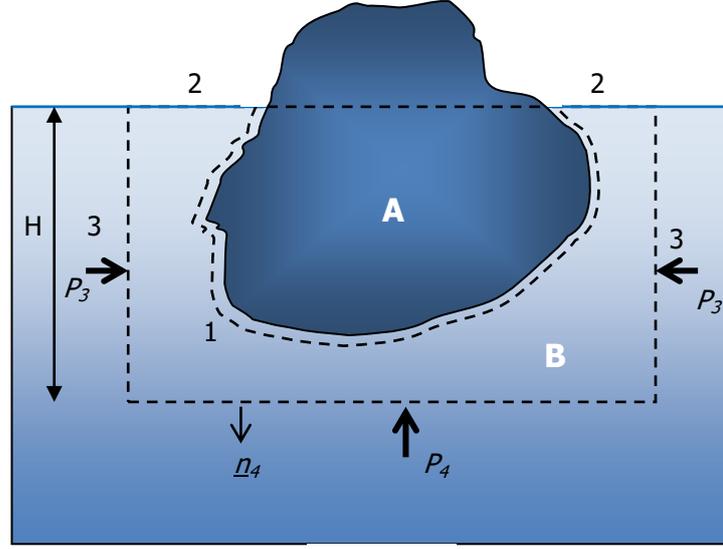
(ج) عند استخدام مضغط مائي

$$h_w \rho_w g = h_m \rho_m g$$

$$1E3(9.81)h_w = 13.6E3(9.81)0.1$$

$$h_w = \mathbf{1.36m.}$$

5.4 الطفو



الشكل 5.4

تُعرّف قوة الطفو بأنها القوة التي تعمل إلى أعلى على الأجسام المغمورة جزئياً أو كلياً في مائع. لاستخلاص تعبير عن هذه القوة نبدأ من معادلة حفظ الإضطراد (2.12) مطبقةً على حجم التحكم المبين في الشكل (5.4).

الحدين الأول و الثاني من المعادلة يساويان الصفر.

الحد الثالث:

$$\iiint_{V_B} \underline{B} dV = -\rho g V_B \underline{k}$$

الحد الرابع :

$$dA = \iint_{A_1} \underline{\sigma}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \underline{\sigma}_2 dA_2 + \iint_{A_3} \underline{\sigma}_3 dA_3 + \iint_{A_4} \underline{\sigma}_4 dA_4 \iint_A \underline{\sigma}$$

على السطح (1): يساوي التكامل \underline{R} وهي القوة التي يؤثر بها السطح الصلب على حجم التحكم.

على السطح (2) : مقياسياً - $p_2 = p_a = 0$

على السطح (3) : تعمل الضغوط إشعاعياً إلى الداخل فتلغى بعضها البعض.

على السطح (4) :

$$\underline{\sigma}_4 = -p_4 \underline{n}_4 = p_4 \underline{k} = \rho g H \underline{k}$$

$$dA_4 = \rho g H A_4 \underline{k} = \rho g (V_A + V_B) \underline{k} \iint_{A_4} \underline{\sigma}_4$$

بالتعويض في معادلة الإضطراد :

$$0 = -\rho g V_B \underline{k} + \underline{R} + \rho g (V_A + V_B) \underline{k}$$

$$\underline{R} = -\rho g V_A \underline{k}$$

القوة على الجسم الطافي \underline{F}_B

$$\underline{F}_B = -\underline{R} = \rho g V_A \underline{k}$$

V_A يساوي حجم الجزء المغمور V_i

وبذلك تكون قوة الطفو

$$\underline{F}_B = \rho g V_i \underline{k} \dots\dots\dots(5.6)$$

مثال 5.3

برميل من الصلب قطره 0.6m وارتفاعه 0.9m ووزنه فارغاً 300N . مُلأً بزيت كثافته 800kg/m^3 و وُضع في ماء كثافته 1000 kg/m^3 .

(أ) أثبت أن البرميل لا يغطس بكامله في الماء .

(ب) إذا بقى البرميل قائماً أحسب ارتفاع الجزء البارز منه.

(أ) في حالة التوازن :

$$F_B = W_d + W_o$$

حيث W_d وزن البرميل الفارغ و W_o وزن الزيت .

$$W_d = 300$$

$$W_o = (AH)\rho_o g = (\pi/4)(0.6)^2 0.9(0.8E3)9.81 = 1997\text{N}$$

$$F_b = 300 + 1997 = 2297\text{N}$$

وبقانون الطفو

$$F_b = \rho_w g V_i = 1000(9.81) V_i = 2297\text{N}$$

$$V_i = 0.234\text{m}^3$$

$$V = AH = 0.254\text{m}^3$$

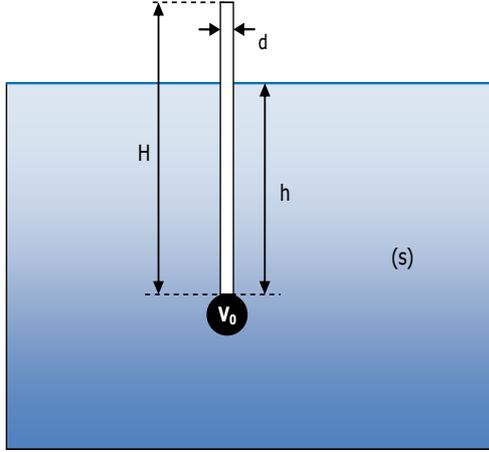
$$V > V_i$$

إذن البرميل لا يغطس تماماً.

$$\frac{V - V_i}{A} = \text{ارتفاع الجزء البارز (ب)}$$

$$= \mathbf{71\text{mm}} \frac{0.254 - 0.234}{\frac{\pi}{4} 0.6^2}$$

5.5 مقياس الكثافة (الهيدرومتر)



الشكل 5.5

الهيدرومتر جهاز يستخدم لقياس الكثافة النسبية للسوائل ويعتمد تصميمه على نظرية الطفو. الشكل (5.5) يوضح هيدرومتر قطر ساقه d وطوله H ووزنه W . حجم الثقل المثبت في قاعدته V_0 . الهيدرومتر مغمور جزئياً في سائل كثافته النسبية s . طول الجزء المغمور من الساق h .

$$F_B = W$$

$$W = \rho g V_I = \rho_w s g \left(V_0 + \frac{\pi}{4} d^2 h \right)$$

$$h = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2 s} - \frac{4V_0}{\pi d^2} \dots \dots \dots (5.7)$$

إذا غُمس الهيدرومتر في الماء المقطر

$$s = 1, \rho = \rho_w, h = h_0$$

$$h_0 = \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} - \frac{4V_0}{\pi d^2}$$

حيث h_0 الارتفاع الذي يشير إلى $s = 1$.
وتصبح بذلك العلاقة العامة

$$h = h_0 + \frac{4W}{\pi g \rho_w d^2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \dots \dots \dots (5.8)$$

مثال 5.4

يراد تصميم هيدرومتر لقياس الكثافة النسبية في المدى $0.5 \leq s \leq 1.5$. قطر ساق الهيدرومتر 10mm وطول الساق 200mm المطلوب تحديد وزن الهيدرومتر و حجم الثقل.

عند $s = 1.5$ الحد الأدنى للساق $h = 0$
و عند $s = 0.5$ الحد الأعلى للساق $h = H = 0.2$
بالتعويض للقيم أعلاه في المعادلة (5.7) و الطرح تعطي

$$h_{0.5} - h_{1.5} = \frac{4W}{g \rho_w \pi d^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$0.2 - 0 = \frac{4W}{9.81(1000)\pi(0.01)^2} \left(\frac{1}{0.5} - \frac{1}{1.5} \right)$$

$$W = 0.115 \text{ N} .$$

و بالتعويض ثانيةً في (5.7) عند $s = 1.5$ و $h = 0$ و $W = 0.116 \text{ N}$

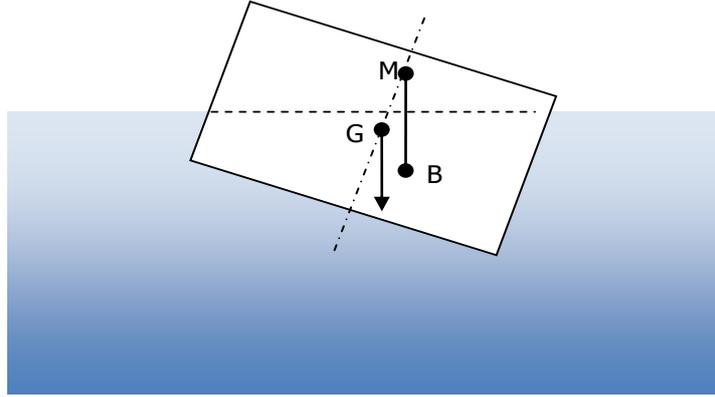
$$V_0 = 7.85\text{E-}6 \text{ m}^3$$

أي بقطر **24.6mm** إذا كان شكل الثقل كروي ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$).

5.6 استقرار الأجسام الطافية

تعريفات :

- 1 **مركز الطفو B** : هو مركز الكتلة للجزء المغمور من الجسم الطافي.
- 2 **مركز التآرجح M** : نقطة تقاطع الخط المركزي الرأسي للجسم في حال سكونه مع الخط الرأسية المار بمركز الطفو في حالة إمالة الجسم الطافي قليلاً.
- 3 **نصف القطر التآرجحي MB** : هو المسافة بين مركز الطفو B ومركز التآرجح M.

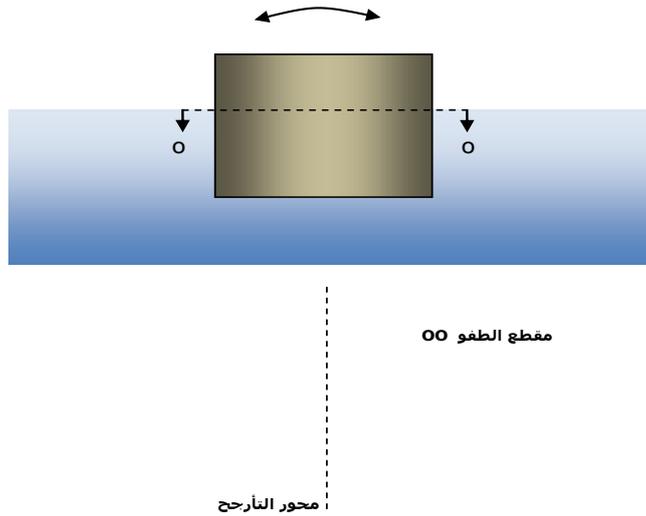


الشكل 5.6

يمكن استخلاص العلاقة أدناه التي تربط نصف القطر التآرجحي بحجم السائل المزاح:

$$MB = \frac{I}{V_i} \dots \dots \dots (5.9)$$

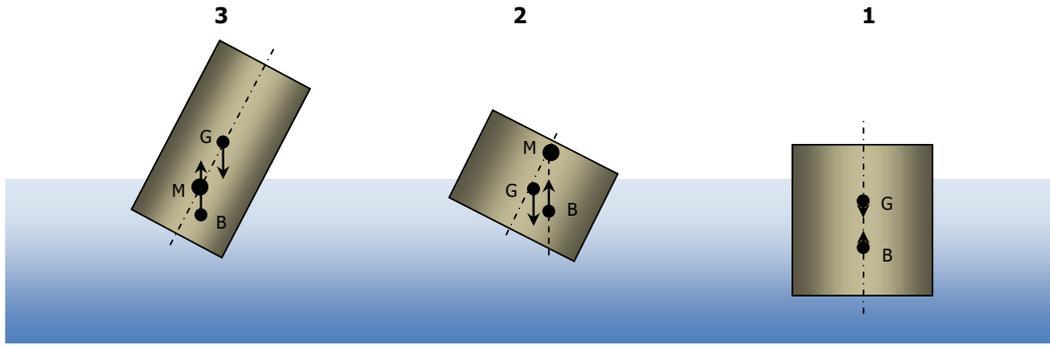
حيث I العزم الثاني لمساحة مقطع الطفو حول محور التآرجح. (الشكل 5.7) و V_i حجم السائل المزاح. I تساوي $\frac{\pi}{64} d^4$ للمقطع الدائري.



الشكل 5.7

و I تساوي $\frac{bd^3}{12}$ للمقطع المستطيل، حيث b الضلع المواز لمحور التآرجح.

استقرار الأجسام الطافية



الشكل 5.8

الأوضاع الممكنة للجسم الطافي ثلاثة:

- 1 جسم متوازن. قوة الطفو F_B تعادل الوزن W ويعملان في خط واحد في الاتجاهين المتعاكسين.
 - 2 جسم مستقر. قوة الطفو والوزن متساويتان ومتوازيتان في خطوط عملها و يشكلان مزدوجاً يعمل لإعادة الجسم لحالة التوازن. يسمى هذا المزدوج مزدوج مُصِحِح . نلاحظ هنا أن النقطة M فوق النقطة G .
 - 3 جسم غير مستقر. قوة الطفو والوزن يتساويان ومتوازيتان في خطوط عملهما . المزدوج الناتج يعمل على زيادة الميل ويسمى لذلك المزدوج القالب. نلاحظ هنا أن المستوى الأفقي للنقطة M تحت المستوى الأفقي للنقطة G .
- نستنتج مما سبق ما يعرف بقاعدة الاستقرار:

$$MB > GB \dots\dots\dots(5.10)$$

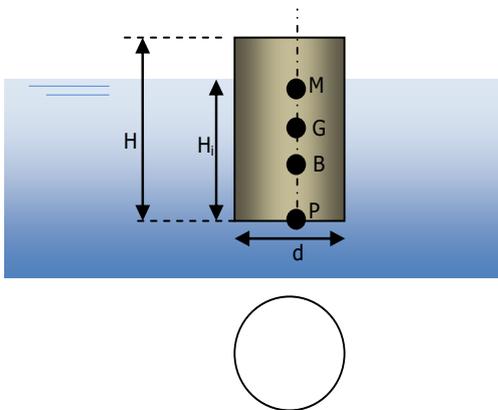
مثال 5.5

جسم أسطواني صلب قطر مقطعه d ، ارتفاعه H وكثافته النسبية S . استخلص القاعدة التي تحكم طفوه قائماً على وضع مستقر في الماء.

قاعدة الاستقرار: $MB > GB$

$$MB = \frac{I}{V_i} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2 H_i}{4}} = \frac{d^2}{16H_i}$$

$$GB = PG - PB = \frac{H}{2} - \frac{H_i}{2} = \frac{1}{2}(H - H_i)$$



الشكل 5.9

قاعدة الطفو: $W = F_B = \rho g V_i$
وباعتبار الكثافة النسبية s

$$s \rho_w g V = \rho_w g V_i$$

$$sH = H_i$$

$$MB = \frac{d^2}{16H_i} = \frac{d^2}{16sH}$$

$$GB = \frac{1}{2}H(1-s)$$

إذن قاعدة الاستقرار:

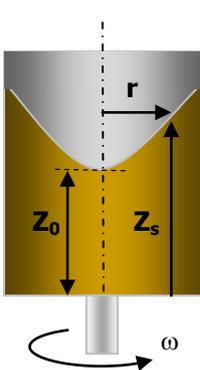
$$> \frac{1}{2}H(1-s) \frac{d^2}{16sH}$$

$$\frac{H}{d} < \frac{1}{2\sqrt{2s(1-s)}}$$

مسائل

- 5.1** حاوية طولها 1.0m و عرضها 0.5m و ارتفاعها 0.3m، صب فيها الماء إلى عمق 0.25m . إذا حُرّكت الحاوية بتسارع أفقي مقداره 2.0 m/s^2 أحسب:
- (أ) زاوية ميل سطح الماء مع الأفقي.
- (ب) كمية الماء المدلوق.
- (ج) القوى التي يؤثر بها الماء على السطحين الأمامي والخلفي.

[11.5°, 25L, 22.7 N, 221N]



الشكل 5.10

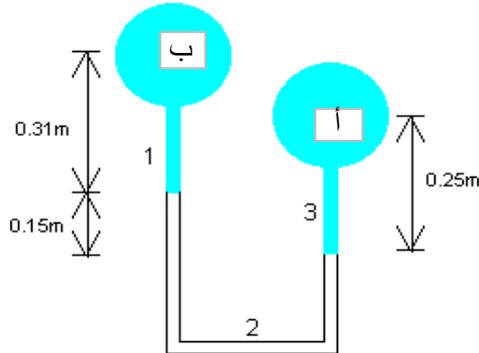
- 5.2** حاوية أسطوانية المقطع تحوي سائل وتدور حول محورها بسرعة $\omega \text{ rad/s}$ - الشكل(5.10). توزيع الضغط لمثل هذه الحالة يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g (z - z_0)$$

$$\text{ومعادلة سطح السائل: } z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

- في حالة محددة قطر الحاوية 0.5m وعمق الماء قبل بدء الدوران 0.1m .
- (أ) أحسب السرعة الزاوية المطلوبة التي تجعل سطح الماء يلامس قاع الحاوية .
- (ب) أحسب الارتفاع الأدنى للحاوية لمنع الماء من الاندلاق عند دوران الحاوية بالسرعة أعلاه.

[7.9 rad/s , 0.2m]



الشكل 5.11

- 5.3** الشكل (5.11) يوضح مضغط تفاضلي يصل أنبوبيين أفقيين أ و ب. أحسب فرق الضغط بين الأنبوبيين إذا كان:

- (i) المائع (1) زيت ذو كثافة نسبية 0.8، المائع (2) زيت ذو كثافة نسبية 13.6 والمائع (3) ماء .
- (ii) الموائع (1) و (3) ماء والمائع (2) زيت .

[20kPa , 20.6 kPa]

- 5.4** شيدت مقصورة على مجموعة من تسعة براميل تطفو رأسياً على ماء البحر ذي الكثافة 1030 kg/m^3 . تزن المقصورة وحدها 10kN . يزن البرميل الواحد 150N و ارتفاعه 1.5m وقطره 0.7m . باعتبار أن متوسط وزن الشخص 600 N أحسب:

- (أ) العمق الذي تغطسه البراميل إذا كان في المقصورة 30 شخص.
- (ب) أكبر عدد من الأشخاص يسمح بدخوله للمقصورة إذا كان عمق الغطس الأكبر المسموح به يساوي 80% من ارتفاع البرميل.

[0.84m , 51]

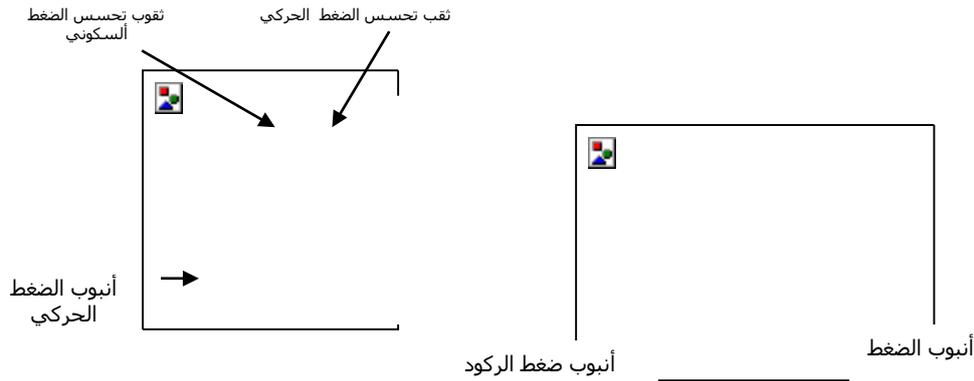
5.5 هايدرومتر قطر أنبويه 10mm يقرأ العدد 1.0 عند غمسه في الماء المقطر ويكون حجم الماء المزاح 0.015 لتر . أحسب المسافة بين القراءة 1.0 و سطح السائل إذا غُمس الهايدرومتر في:
(أ) زيت كثافته النسبية 0.85
(ب) حامض نترك كثافته النسبية 1.5.
[+34mm , - 64 mm]

5.6 كتلة خشبية بمقطع أفقي مربع مساحته 0.1m^2 وكثافة نسبية 0.6 . جد المدى المستقر لارتفاع الكتلة عند وضعها في سائل كثافته النسبية 0.9 .
[<0.3m]

6 طُرُق القياس

6.1 تحسس الضغط

يمكن تحسس مستوى الضغط عند أي مقطع متعامد على اتجاه السريان بواسطة أنبوب رفيع تتعامد مقدمته على اتجاه السريان، ويعرف من التجربة أن الضغط يكون ثابت المستوى عند النقاط المتعامدة على السريان وفي مقطع واحد إذا كان المجرى مستقيماً أو ذا انحناء صغير مقارنةً بعرض المجرى. ويوضح الشكل (6.1) أنبوب الضغط الذي يتحسس الضغط p عند المقطع المراد قياس الضغط عنده.



الشكل 6.2

الشكل 6.1

يعرّف بالمقابل الضغط الركودي بأنه مستوى الضغط إذا هبطت سرعة السريان اللالزجي إلى الصفر. وبذلك يمكن تحسس الضغط الركودي p_0 بأنبوب تستقيم مقدمته في اتجاه السريان - الشكل (6.2). يمكن إدراك علاقة الضغط p بضغط الركود p_0 للسريان المثالي اللالزج من علاقة برنولي المبسطة

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{p_0}{\rho}$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{الضغط الحركي} \dots\dots\dots(6.1)$$

الشكل (6.2) يبين إمكانية جمع أنبوبي الضغط والضغط الركودي في أنبوب مركب واحد يعرف بأنبوب الضغط الحركي.

6.2 أجهزة قياس الضغط

6.2.1 المِضْغاط السائلي

المِضْغاط السائلي (المانومتر) أنبوب يستخدم أعمدة السوائل لتحديد الفروق في الضغط. و تنبني قاعدة قياس الضغط بالمِضْغاط السائلي على المعادلة (5.5) حيث نرى أن معرفة ارتفاع سائل المِضْغاط وكثافته تُمكن من تحديد الضغط. و يستخدم المِضْغاط السائلي عادةً في مدى الضغط 20 Pa إلى 0.14E6 Pa .

اختيار سائل المِضْغاط يعتمد على فرق الضغط المتوقع. فيستخدم الزئبق ذو الكثافة العالية لفروق الضغط العالية و يستخدم الماء عادةً لفروق الضغط المنخفضة.

6.2.1.1 المِضْطاط السائلي البسيط

المِضْطاط السائلي البسيط أنبوب زجاجي رفيع في شكل U ، يوصل طرفيه إلى نقطتي تحسس الضغط (1) و (2) كما في الشكل (6.3). ينشأ عن التوصيل فرق مِضْطاطي h وتستخدم المعادلة (5.5) لتعطي

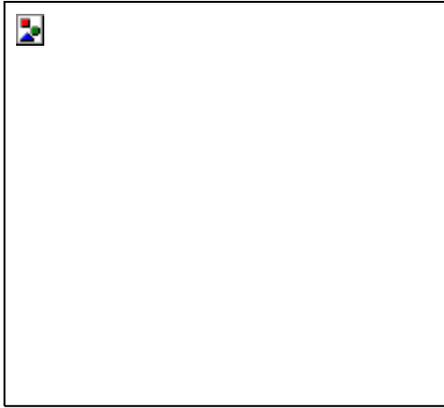


الشكل 6.3

$$p_1 - p_2 = \rho gh \dots \dots \dots (6.2)$$

6.2.1.2 مِضْطاط الصناعة

لتحديد المقدار h في المِضْطاط البسيط نحتاج لقراءة ارتفاع سائل المِضْطاط في كلٍ من فرعي المِضْطاط ومن ثم حساب الفرق. وقد صُمم مِضْطاط الصناعة - الشكل (6.4) - للتمكين من القراءة من فرعٍ واحدٍ مما يبسط استخدام المِضْطاط السائلي.



الشكل 6.4

فرعي مِضْطاط الصناعة لهما أقطار متباينة $A_1 \gg A_2$. عند توصيل الفرعين بنقاط ضغط مختلفة ينشأ فرق الارتفاع h حيث

$$p_2 - p_1 = \rho gh \dots \dots \dots (1)$$

$$h = h_1 + h_2$$

حيث h_1 الزيادة في عمود سائل المِضْطاط في الفرع (1) و h_2 النقصان في عمود السائل في الفرع (2). و نسبةً لعدم تساوي المساحات فإن h_2 تكون أكبر من h_1 مرتبطين بالعلاقة الحجمية

$$h_2 A_2 = h_1 A_1$$

$$h_1 = h_2 \frac{A_2}{A_1}$$

وبذلك تصبح المعادلة (1)

$$p_2 - p_1 = \rho gh_2 \left(\frac{A_2}{A_1} + 1 \right)$$

بما أن A_2/A_1 صغيرة مقارنةً بالواحد الصحيح يمكن أن نكتب:

$$p_2 - p_1 = \rho gh_2 \dots \dots \dots (6.3)$$

يُمكن هذا التصميم إذن من قراءة h_2 فقط لحساب $p_2 - p_1$ بدون فقدانٍ يذكر في الدقة. إذا كانت $d_2/d_1 = 0.1$ ، مثلاً، فإن الخطأ في المعادلة (6.3) 1% فقط .



الشكل 6.5

6.2.1.3 المِضْغاط السائلي المائل

الشكل (6.5) يوضح مِضْغاط صناعة مائل. نسبةً لأن المساحة A_2 تقل كثيراً عن A_1 فإن القراءة تؤخذ فقط من الفرع (2) كما سبق الشرح. بالرجوع إلى المعادلة (5.5) نرى أن إمالة الفرع (2) لا تؤثر في الارتفاع الرأسي لعمود السائل، أي h_2 . إلا أنها تؤدي إلى زيادة الطول المائل للعمود x حيث

$$x = \frac{h_2}{\sin \theta}$$

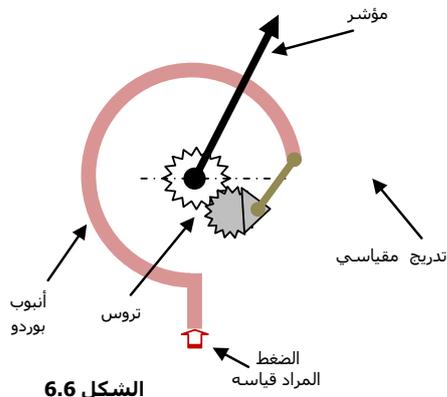
وتصبح المعادلة (6.3)

$$p_2 - p_1 = (\rho g \sin \theta)x \dots \dots \dots (6.4)$$

و لأن $\sin \theta > 1.0$ فإن $h_2 < x$ مما يوفر "حساسية" أفضل للمِضْغاط.

6.2.2 مِضْغَاط بوردو

مِضْغَاط بوردو للضغَط واسع الاستخدام في الصنعة لصغر حجمه وسهولة استخدامه و للمدى الواسع للضغَط مقارنةً بالمِضْغَاط السائلي. حيث تتوفر مقاييس بوردو في المدى 1kPa حتى 100MPa ضغَط مقياسي. إلا أنه أقل دقة من المِضْغَاط السائلي .



الشكل 6.6

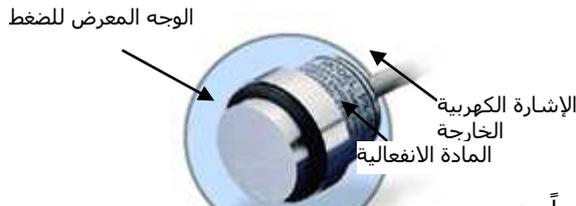
ويعتمد القياس بمِضْغَاط بوردو على ما يُعرف بـ **أنبوب بوردو**. وهو أنبوب ذو مقطع إهليلجي من معدن رقيق و لدن. يكون الأنبوب حرراً في شكلٍ شبه دائري كما هو موضح في الشكل (6.6). عند تحسس ضغَط أعلى من الضغَط الجوي عند مدخله يعمل الضغَط على تمديد الأنبوب وينشأ عن ذلك شد للترس المثلث الذي بدوره يدير الترس الدائري فيحرك المؤشر.

ينبغي مراعاة اختبار مِضْغَاط بوردو دورياً للتيفن من عمله داخل مستوى الدقة المطلوب.

6.2.3 مِحْوَالَة الضغَط

6.2.3.1 توصيف

المِضْغَاط السائلي و مِضْغَاط بوردو يفيان لغرض القياس الموضعي للضغَط. إلا أنهما غير كافيان لأغراض القراءة-عن-بعد و التحكم. عند الحاجة لهذه الأغراض يلجأ المهندس لـ **مِحْوَالَة الضغَط**. مِحْوَالَة الضغَط هي الأداة التي تحول الطاقة الميكانيكية الناشئة عن ضغَط إلى إشارة كهربية لأغراض متعددة تشمل قياس و إرسال المقدار الضغطي.



الشكل 6.7: مِحْوَالَة ضغَط

تتعدد أنواع المِحْوَالَة الضغطية. إلا أن أكثرها شيوعاً هو **المقياس الانفعالي** و الذي يتحول فيه الضغَط إلى إشارة بالتغير البنائي لجسم المقياس بسبب الضغَط مما يحدث تغيراً في موصليته الكهربائية و الذي ينعكس بدوره - و بصورة متناسبة - على مستوى الإشارة الكهربائية المرسله عبره. الشكل 6.7 يوضح مِحْوَالَة ضغَط ذات واجهة ضغَط تواجه المائع مباشرةً. في حال استخدام المِحْوَالَة لقياس الضغَط في سوائل لزجة أو ذات اثر تآكلي على المِحْوَالَة ينبغي استخدام مِحْوَالَة من النوع المحجوب برفيقة حاجبة تمنع انتقال الكتلة و لا تحجب الأثر الضغطي.

الشكل 6.8 يوضح مثال لهذا النوع من المِحْوَالَات.



الشكل 6.8

6.2.3.2 أنواع الخرج الكهربى للمحوالة

تُصنَّع محوالة الضغط بثلاثة خيارات من حيث الخرج الكهربى: **الجهد الصغير، الجهد المُضخَّم و التيار 4 إلى 20 ميلي أمبير.**

(أ) **الجهد الصغير:** الخرج الكهربى ذو الجهد الصغير - و يعرف أيضاً بأسلوب **الميلي فولت** -

هو الأقل تكلفة. الجهد الخارجى الأعلى فى هذه الحالة حوالى 30 ميلي فولت (30mV). الجهد الخارجى الفعلى فى كل عملية قياس يتناسب طردياً مع الضغط المراد قياسه. ضالة الإشارة تُحتم أن يكون موضع الجهاز بمبعدة من أى تشويش كهربى خارجى. كما أن المسافة بين المحوالة و جهاز الاستقبال ينبغي أن تكون قصيرة.

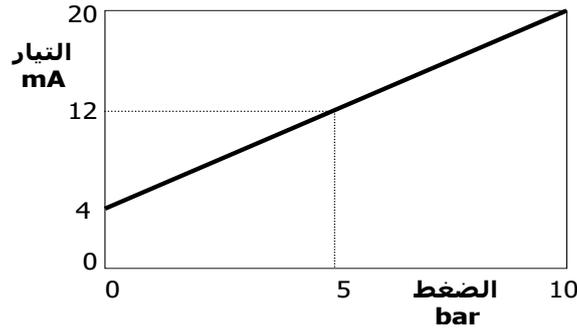
(ب) **الجهد المُضخَّم:** يشمل هذا النوع من المحوالات مواءمة متكاملة للإشارة و تُخرج

جهداً أعلى بكثير مما تخرج محوالة الجهد الصغير و يكون عادةً فى المدى 0-5Vdc أو المدى 0-10Vdc.

(ت) **التيار 4 إلى 20 ميلي أمبير:** كما يُوحى الاسم تُعطي المحوالة من هذا النوع خرجاً

فى مدى التيار 4-20mA. اختيار هذا المدى مبني على أن الإشارة لا تتأثر فيه بالتشويش الكهربى و بمقاومة الموصلات. ويمكن استخدامه عند الحاجة لخطوط توصيل طويلة تتجاوز الثلاثمائة متر.

الشكل (6.9) يوضح كيفية التعبير للمحوالة.



الشكل 6.9

6.3 أجهزة قياس معدل السريان

6.3.1 أنبوب الضغط الحركي (أنبوب بيتو)

بتوصيل طرفي أنبوب الضغط الحركي- الشكل (6.2) - إلى مضغط بواسطة أنبوبين مطاطيين يمكن قراءة فرق ارتفاعي أعمدة سائل المضغط ومن ثم حساب الضغط الحركي الذي يساوي $\frac{1}{2}\rho v^2$ ، حسب المعادلة (6.1). ونستنتج السرعة الموضعية بالتالي من المعادلة :

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \dots\dots\dots(6.5)$$

لمعرفة معدل السريان تُقاس السرعة في مواضع متعددة عند مقطع عرضي واحد ويستخلص معدل السريان بمكاملة السرعة مع المساحة.

يتميز هذا المقياس ببساطته و كلفته المنخفضة و دقته. و يمكن استخدامه لكل من السوائل و الغازات. و يمكن توصيل أنبوب الضغط الحركي بوسائل قياس ضغط مختلفة بدلاً من المضغط السائلي إذا اقتضت الضرورة ذلك - كما هو موضح في الشكل 6.10.



يجب إدراك أن صلاحية المعادلة (6.5) قاصرة على السريان اللاإنضغاطي. في حالة السريان الإنضغاطي تتطلب المعادلة الحاكمة تعديلاً يراعى الإنضغاطية، و يتم عرض ذلك في القسم (11.7) عقب دراسة السريان الإنضغاطي.

مثال 6.1

أستُخدم أنبوب ضغط حركي لقياس السرعة في موضع بسريان ماء كثافته 1000 kg/m^3 مستخدمين الزيتك كسائل مضغاطي. الفرق في مستويي الزيتك 40mm و الكثافة النسبية للزيتك 13.6. أحسب السرعة الموضعية للسريان.

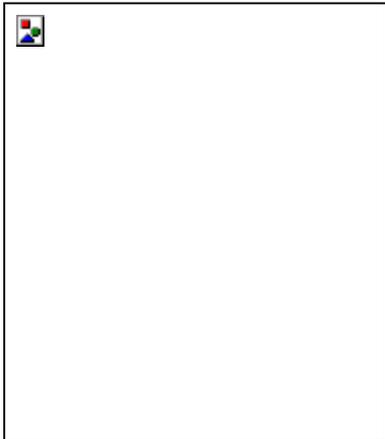
بمعادلة الضغط عند المستوى الأفقي (1)

$$p_0 + \rho_w g(0.04) + \rho_w g h =$$

$$p + \rho_m g(0.04) + \rho_w g h$$

$$p_0 - p = 4,940 \text{ Pa}$$

$$v = 3.1 \text{ m/s} \text{ تُعطي (6.5) المعادلة}$$



الشكل 6.11

6.3.2 مقاييس السريان المُقلّصة

6.3.2.1 نظرية المقاييس المُقلّصة

تَعتمد نظرية المقاييس المُقلّصة على أن انخفاض الضغط الناشئ عن تقلُّص مساحة المجرى له صلة مباشرة بزيادة السرعة حسب معادلتَي الطاقة و الكتلة. عند التفكير في أنبوب مساحة مقطعه الابتدائي A ومساحة مقطعه عند موضع التقليل a ، فإن معادلتَي الطاقة و الكتلة تعطيان معدل السريان الحجمي q حيث

$$q = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$$

و حيث Δp الانخفاض في الضغط.
بأخذ الاعتبار للفواقد في الطاقة يكون معدل السريان أقل مما توضحه المعادلة أعلاه.
و يُعرّف لذلك معامل السريان C_d و قيمته أقل من 1.0

$$q = C_d \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \dots\dots\dots(6.6)$$

و يمكن اختصار الجانب الأيمن للمعادلة (6.6) بتعريف الثابت C .

$$q = C \cdot a \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} \dots\dots\dots(6.7)$$

يوضح الشكل (6.8) الأنواع الأكثر شيوعاً لمقاييس السريان المُقلّصة. و هي المقياس الفوهي و المقياس المنفت و المقياس الفنشوري. أبسطها وأقلها تكلفة المقياس الفوهي. إلا أن معامل سريانه C_d هو الأقل قيمة، مما يعني فقداً أكبر في الطاقة. المقياس الفنشوري يميزه الفقد الضئيل في القدرة إلا أن تكلفته أعلى نسبياً. ويتوسط المقياس المنفت المقاييس الآخرين أداءً وتكلفة. تتصف المقاييس المُقلّصة عامةً بالبساطة و عدم الحاجة للصيانة و العمر الطويل و تناسب كلاً من السوائل و الغازات. كما أن تكلفتها أقل بكثير من مقاييس السريان الأخرى.

فنشوري

فوهي

منفت

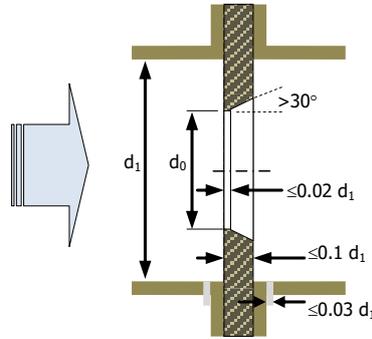


الشكل 6.12

6.3.2.2 مقياس السريان الفوهي

بساطة مقياس السريان الفوهي تجعل تصنيعه سهلاً. كما أن دقته جيدة إذا روعيت قواعد التصميم و الاستخدام.

الشكل (6.13) يبين تصميم معياري لمقياس فوهي¹. يمكن تصنيع القرص الفوهي على مخروطة بالأبعاد الموضحة المنسوبة للقطر الداخلي للأنبوب d_1 . قطر الفوهة d_0 اختياري.



الشكل 6.13

المعامل C في المعادلة (6.7) يقرأ من القائمة أو الخارطة في الملحق د.

¹ VDI orifice, NACA tech.Mem.952>

مثال 6.2

أنبوب قطره الداخلي 400mm ينقل ماء للتبريد في منشأة توليد حراري بمعدل غير معلوم. تستخدم المنشأة مقياس فوهي قطر فوهته 268mm. إذا كانت قراءتا مقياسي بوردو الموصلين على جانبي القرص الفوهي هما 110,000Pa و 100,000Pa، استخلص معدل السريان في الأنبوب. افترض أن المقياس معياري من نوع VDI الموضح في الشكل (6.13) و أن كثافة الماء 994kg/m^3 و لزوجته $0.7\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$.

المعادلة (6.7) تعطي معدل السريان كدالة في فرق الضغط

$$q = C \cdot a \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p}$$

$$\Delta p = 110,000 - 100,000 = 10,000\text{Pa}$$

$$a/A_1 = 0.45$$

نسبةً إلى أن المعامل C دالة في معدل السريان q ، يتعين استخدام أسلوب تكراري للوصول إلى q :

(أ) تفترض قيمة ل q

(ب) تُحسب السرعة v_1

(ت) يُحسب عدد رينولز Re_1

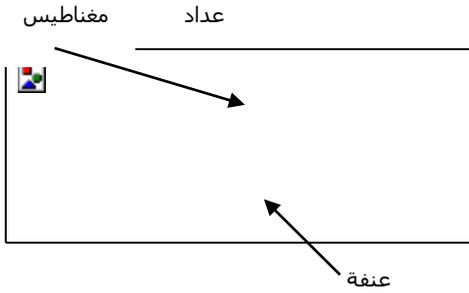
(ث) تقرأ قيمة المعامل C من الملحق د.

(ج) تحسب قيمة q من المعادلة (6.7)

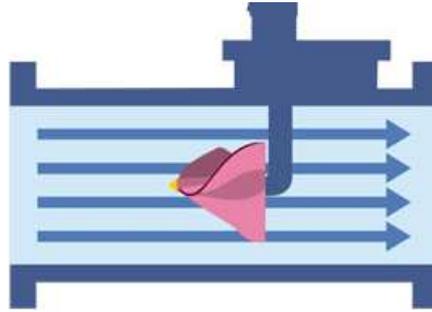
(ح) العودة للخطوة (ب).

باتباع الأسلوب التكراري يمكن أن نخلص إلى أن معدل السريان في الأنبوب يساوي $0.173\text{m}^3/\text{s}$.

6.3.3 مقياس السريان العنفي

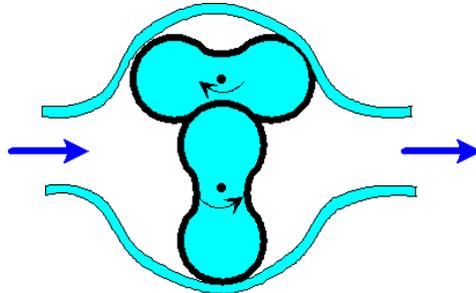


الشكل 6.14



تدور العنفة بتأثير السريان وتعتمد سرعة دورانها على سرعة تيار المائع - الشكل (6.14). وبذلك يمكن جعل سرعة دوران العنفة مقياساً لمعدل السريان. يتسبب المغناطيس الدائر مع العنفة في حث قوة كهربية دافعة في الملف ويولد بذلك نبضات جهد كهربية. عد هذه النبضات يُمكن من معرفة سرعة العنفة ومن ثم تقدير معدل سريان المائع. يصلح مقياس السريان العنفي للسوائل النقية بما لا يزيد عن 5% من المتعلقات و درجة حرارة لا تتجاوز 40°C .

6.3.4 مقياس السريان الإزاحي



الشكل 6.15

الدوار المستخدم في هذا المقياس موجب الإزاحة - الشكل 6.15. في كل دورة كاملة يسري حجم محدد من السائل من أحد جانبي الأنبوب إلى الآخر. عد دورات الدوار يُمكن من تقدير السريان الكلي. عدد الدورات والوقت المناظر يمكن من تقدير معدل السريان. يمتاز المقياس الدوار بالدقة ويستخدم عادةً في محطات الخدمة النفطية.

6.3.5 مقياس السريان الطفوي

يتكون هذا المقياس - الشكل 6.16 - من أنبوب شفاف مخروطي الشكل يثبت رأسياً في مسار المائع و جسم صغير الحجم ضئيل الكثافة دورانى المقطع يوضع



الشكل 6.16

حراً داخل الأنبوب. عند مرور المائع في الأنبوب يتعرض الجسم إلى قوة إعاقة تعمل إلى أعلى تعادلها محصلة وزن الجسم و قوة طفوه. الشكل المخروطي للأنبوب يجعل السرعة المتوسطة للسريان تتناقص مع ارتفاع موضع الجسم. و بسبب الصلة المباشرة بين قوة الإعاقة و سرعة المائع فان ارتفاع الجسم يعتمد على معدل السريان. و يمكن بذلك تغيير الأنبوب رأسياً ليبدل موضع الجسم المغمور إلى معدل السريان. القرص المثبت أعلى الجسم الحُر به أخاديد مائلة وظيفتها إحداث حركة دورانية في الجسم حول المحور الرأسي مما يؤدي لتوسط الجسم في الأنبوب.



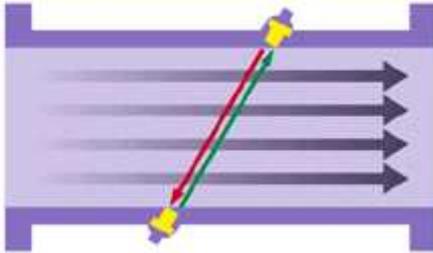
الشكل 6.17

6.3.6 مقياس السريان الكهرومغناطيسي

نظرية المقياس الكهرومغناطيسي تعتمد على قانون فاراداي للحث المغناطيسي. يقوم السائل المار عبر الأنبوب بدور الموصل. و يتسبب ذلك في حث جهد يتناسب مقداره مع سرعة السريان. يُلتقط الجهد بواسطة أقطاب حساسة مثبتة على بطانة المقياس- الشكل(6.17) و يرسل إلى الحاسبة المعيرة لتحويل الجهد إلى معدل سريان.

6.3.7 مقياس السريان فوق السمعي

الأثر فوق السمعي هو الذي ينشأ عن تحريك موجات ضغطية بتردد يفوق النطاق المسموع - أي أعلى من 20kHz . يستغل هذا الأثر في القياس باستخدام محوالتين تشعان نبضات فوق سمعية عبر السريان أسلوب تناوبي و بميل محدد - كما هو مبين في الشكل 6.18 . نسبةً إلى أن النبضة المتحركة نحو الجانب السافلي أسرع من التي تتحرك نحو الجانب الصعيدي بسبب مساعدة تيار المائع للأولى و إبطائه للثانية ينشأ فرق بين وقتي الوصول للنبضتين. برصد هذا الفرق يمكن مع الشكل 6.18 المائع و من ثم معدل السريان.



دقة هذا المقياس عالية نسبياً و لا يتجاوز الخطأ 1%. و يستخدم للسوائل النقية.

6.3.8 تحوط لدقة القياس

يراعى عند تركيب مقياس السريان من أي نوع أن يصل المائع لمقطع المقياس منتظماً و دون دوامات. و يتيسر ذلك بأن يكون هنالك طول كاف للأنبوب المستقيم صعيد المقياس. و أن يخلو هذا الطول من مسببات التدويم.

7 الدفع

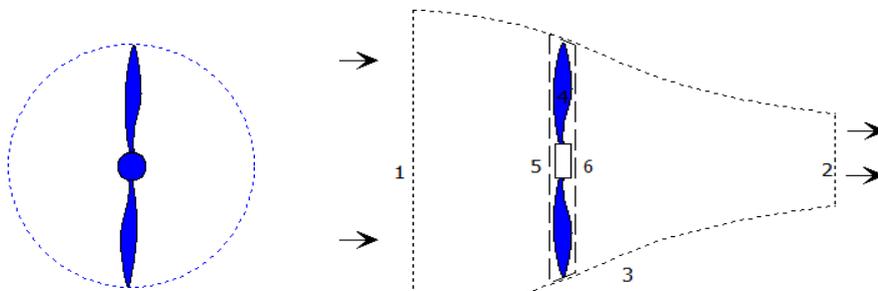
تم استخلاص معادلة حفظ الإضطراب في الصورة التكاملية في الباب الثاني و هي

$$\dots\dots\dots(2.12) \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v dV + \iint_A \rho v (v dA) = \iiint_V B dV + \iint_A \sigma dA$$

حيث V حجم التحكم و A مساحة سطح التحكم. تمثل الحدود الأربعة على التوالي: تراكم الإضطراب داخل حجم التحكم و القوة الناشئة عن عبور الإضطراب لحدود حجم التحكم و القوة الجسمية ثم القوة السطحية.

7.1 الدفّاع

الدفّاع دوّار مبروحى يُستخدم لدفع بعض أنواع الطائرات والسفن حيث تُحوّل عبره القدرة الميكانيكية إلى قدرة حركية في السريان. ويؤثر رد الفعل على الجسم المراد دفعه فيحركه في الاتجاه المضاد للسريان.



الشكل 7.1

بتطبيق معادلة الإضطراب (2.12) على حجم التحكم 1-2-3-4:

$$\iint_A \rho v (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\rho v_1 (-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + \underline{R}_4$$

$$\underline{R}_4 = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - p_1 A_1 + p_2 A_2) \underline{i} \dots\dots\dots(1)$$

الضغط p_1 و الضغط p_2 جويّان (يساويان الصفر مقياسياً).

تُعرف q معدل السريان الحجمي لتيّار المائع:

$$q = vA = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

حيث v متوسط السرعة عبر الدفّاع و A المساحة التي يدور فيها الدفّاع.

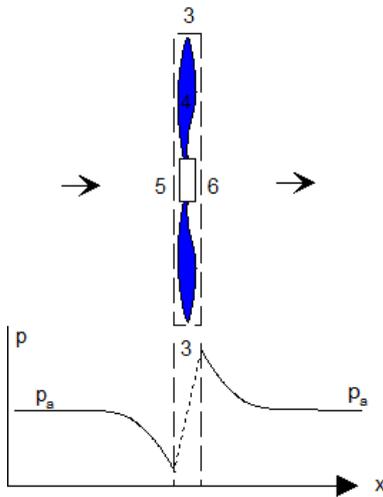
قوة الدفّاع F_t هي القوة المؤثرة على الدفّاع بينما R_4 هي القوة على المائع في حجم التحكم، وبذلك

$$\underline{F}_t = -\underline{R}_4$$

$$= (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) (-\underline{i}) \underline{F}_t$$

$$F_t = \rho q (v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.1a)$$

$$F_t = \rho v A (v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.1b)$$



الشكل 7.2

بتطبيق المعادلة (1) على حجم التحكم الأصغر 3-4-5-6:

$$\underline{R}_4 = [\rho v A (v_6 - v_5) + p_6 A_6 - p_5 A_5] \underline{i}$$

السطحان (5) و (6) متقاربان ويمكن اعتبار

$$A_5 \sim A_6 = A$$

$$v_5 \sim v_6 = v$$

ويتبع ذلك

$$\underline{R}_4 = (p_6 - p_5) A \underline{i}$$

$$F_t = (p_6 - p_5) A (-\underline{i})$$

$$F_t = (p_6 - p_5) A \dots\dots\dots(2)$$

في الاتجاه السالب لـ x .

المعادلتان (2) و (7.1b) تعطيان

$$p_6 - p_5 = \rho v (v_2 - v_1) \dots\dots\dots(3)$$

وبتطبيق معادلة الطاقة على القطاعين 5-1 و 6-2

$$\frac{p_5}{\rho} + \frac{v_5^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{p_6}{\rho} + \frac{v_6^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \dots\dots\dots(5)$$

تعطي المعادلتان (4) و (5)

$$p_6 - p_5 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \dots\dots\dots(6)$$

و المعادلتان (6) و (3)

$$v(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \dots\dots\dots(7.2)$$

وتعرف هذه المعادلة **بنظرية فرود**.

القدرة الخارجة من الدفاع P_o

$$P_o = F_t v_1 = \rho A v_1 (v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.3)$$

القدرة الداخلة إلى الدفاع P_i

$$P_i = F_t v = \rho A v^2 (v_2 - v_1) \dots\dots\dots(7.4)$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{P_o}{P_i} = \eta = \text{الكفاءة النظرية للدفاع}$$

$$\eta = \frac{v_1}{v} \dots\dots\dots(7.5)$$

7.2 مثال

القدرة الداخلة إلى دفاع طائرة من محركها تساوي 1MW . تطير الطائرة بسرعة 90m/s في هواء ساكن كثافته 1.1kg/m^3 قطر الدفاع 3m . أحسب:

- (أ) سرعة تيار الهواء في الجانب السفلي.
- (ب) سرعة تيار الهواء عبر الدفاع.
- (ج) قطر مسار تيار الهواء صعيد وسافل الدفاع.
- (د) قوة الدفع على المحرك.
- (هـ) الكفاءة النظرية للدفاع.

(أ) القدرة الداخلة إلى الدفاع ، المعادلة 7.4

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1)$$

و باستخدام نظرية فرود

$$P_i = \frac{1}{4} \rho A (v_1 + v_2)^2 (v_2 - v_1)$$

$$1E6 = \frac{1.2}{4} \left(\frac{\pi}{4}\right)(9)(90+v_2)^2 (v_2 - 90)$$

$$v_2 = \mathbf{103.7m/s}$$

(ب) المعادلة 7.2 - نظرية فرود

$$= \mathbf{96.9m/s} v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

(ج) معدل السريان الحجمي q

$$q = v A = \mathbf{684.6 m^3/s}$$

$$A_1 = \frac{q}{v_1} = \mathbf{7.61 m^2}, d_1 = \mathbf{3.11m}$$

$$A_2 = \frac{q}{v_2} = \mathbf{6.63 m^2}, d_2 = \mathbf{2.90m}$$

(د) الدفع F_t ، المعادلة (7.1a)

$$F_t = \rho q (v_2 - v_1) = \mathbf{10.3kN}$$

(هـ) كفاءة الدفاع η ، المعادلة (7.5)

$$= \mathbf{0.93} \eta = \frac{v_1}{v}$$

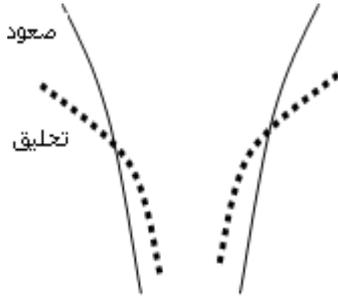
الدَّفَاعُ الرَّئِيسُ لِلطَّائِرَةِ الحَوَّامَةِ

تعتمد حركة الطائرة الحوَّامة اعتماداً كاملاً على الدَّفَاعِ الرَّأْسِيِّ المحوَر - الشكل (7.3). بينما يقتصر دور الدَّفَاعِ الصَّغِيرِ الأفقي المحوَر على حفظ الاتزان بمقابلة الأثر الجانبي الناشئ عن دوران الدَّفَاعِ الرَّأْسِيِّ المحوَر.



الشكل 7.3

(أ) التحليق



الشكل 7.4: مسار الهواء في حالتي الصعود والتحليق

سرعة الطائرة الحوامة في الاتجاه العمودي صفر في هذه الحالة .

$$v_1 = 0$$

وبالرجوع لمعادلة الدفع (7.1b)

$$F_t = \rho v_2 A$$

كما أن معادلة فرود تُختصر إلى

$$v = \frac{1}{2}v_2$$

$$F_t = \frac{1}{2}\rho A v_2^2$$

أو

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \dots \dots \dots (1)$$

القدرة الداخلة P_i

$$P_i = \rho A v^2 (v_2 - v_1) = \frac{1}{4} \rho A v_2^3 \dots \dots \dots (2)$$

المعادلتان (1) و (2) تعطيان

$$P_i = \frac{\rho A}{4} \left(\sqrt{\frac{2F_t}{\rho A}} \right)^3 = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}}$$

$$P_i = \sqrt{\frac{F_t^3}{2\rho A}} \dots \dots \dots (3)$$

كما أنه عند التحليق يتساوى الدفع و وزن الطائرة

$$P_i = \sqrt{\frac{W^3}{2\rho A}} \dots \dots \dots (7.6)$$

(ب) الصعود العمودي

القدرة المطلوبة هنا تزيد عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق. والدفع يفوق وزن الطائرة

$$F_t > W$$

(ج) الهبوط العمودي

القدرة المطلوبة في هذه الحالة تقل عن القدرة المطلوبة في حالة التحليق والدفع المطلوب

يقل عن وزن الطائرة

$$F_t < W$$

(د) الحالة العامة

الدفع المطلوب هنا (الشكل 7.5) له مُركبة عمودية و مُركبة أفقية. يعدل مستوى دوران الدفاع بزاوية ليعطي المُركبات المطلوبة وتعديل القدرة الداخلة لتفي بمحصلة القوتين والسرعة الانتقالية المطلوبة.

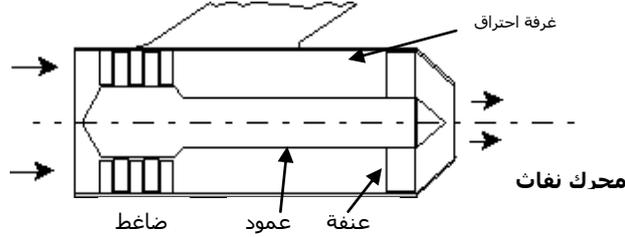


الشكل 7.5

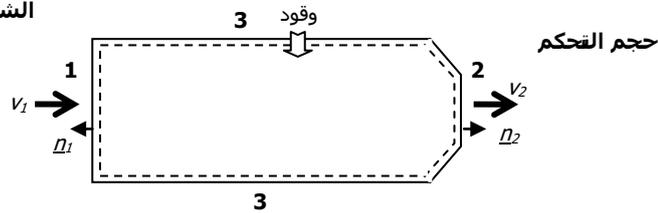
7.2 الدفع النفاث



7.2.1 نظرية الدفع النفاث



الشكل 7.6



يتم الدفع النفاث بهروب الغازات الناتجة عن احتراق الوقود بسرعة عالية من مؤخرة المحرك. يُوقَّر الضغط المطلوب للهواء الداخل إلى غرفة الاحتراق بواسطة ضاغط يستمد قدرته من عنفة تدور بفضل اندفاع نواتج الاحتراق عبرها.

بافتراض أن السريان رتيب و أحادي البعد تختزل المعادلة (2.12) المطبقة على حجم التحكم الموضح إلى الصورة:

$$\iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\rho v_1 (-v_1 A_1) \underline{i} + \rho v_2 (v_2 A_2) \underline{i} = p_1 A_1 \underline{i} - p_2 A_2 \underline{i} + \underline{R}_3$$

حيث \underline{R}_3 هي القوة المؤثرة على حجم التحكم عند السطح (3).

وبذلك يكون الدفع على جسم المُحرِّك

$$= [\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1] (-\underline{i}) \underline{F}_t = -\underline{R}_3$$

اتجاه القوة هو الاتجاه السالب لـ x .

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots \dots \dots (1)$$

وباعتبار معدل سريان كتلة الهواء عند المدخل m_1

و معدل السريان الكتلة عند المخرج m_2

و معدل سريان كتلة الوقود m_f

فإن

$$m_2 = m_1 + m_f$$

نسبة الوقود إلى الهواء بالوزن $\varphi =$

$$\varphi = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_1}$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 (1 + \varphi)$$

وتصبح المعادلة (1) :

$$F_t = \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_1 v_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots\dots\dots (7.7a)$$

$$F_t = \dot{m}_1 [(1 + \varphi)v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1 \dots\dots\dots (7.7b)$$

مثال 7.2

يختبر محرك نفاث وهو ساكن على منصة اختبار. سرعة دخول الهواء إلى المحرك 150m/s وسرعة النفاث 1000m/s . يمكن افتراض أن ضغط الهواء الداخل وضغط النفاث يعادلان الضغط الجوي. نسبة وزن الوقود إلى الهواء تساوي 0.02 . مساحة المقطع الدخولي و المقطع الخرجي 0.2m² كثافة الهواء الداخل 1.15 kg/m³ .

أحسب القوة اللازمة لكبح المحرك على منصة الاختبار.

باستخدام المعادلة (7.7b)

$$F_t = \dot{m}_1 [(1 + \varphi)v_2 - v_1] + p_2 A_2 - p_1 A_1$$

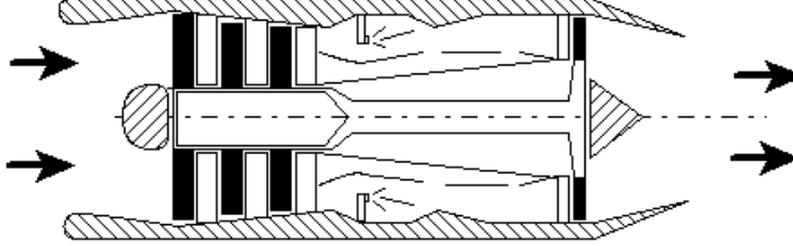
v_1	v_2	φ	p_2	p_1
150	1000	0.02	0	0

$$\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1 = 1.15(150)0.2 = 34.5 \text{ kg/s}$$

$$F_t = 34.5 [(1 + 0.02)1000 - 150] = \mathbf{30.0 \text{ kN}}$$

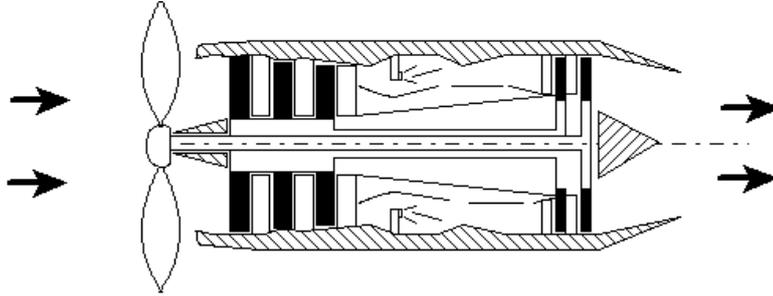
7.2.2 أنواع الدفع النفاث

بدءً من المحرك العنفي النفاث (الشكل 7.7) - وهو الذي عُرضت نظرية الدفع النفاث عبره - استُخدمت صناعة الطيران أجيال من المحركات النفاثة المُطوّرة. و قد سعى هذا التطوير لمقابلة المتطلبات المتنوعة بالكفاءة الأعلى لكل حالة. و نعني بالمتطلبات المتنوعة حمولة الطائرة و مدى الطيران و السرعة و غيرها من العوامل.



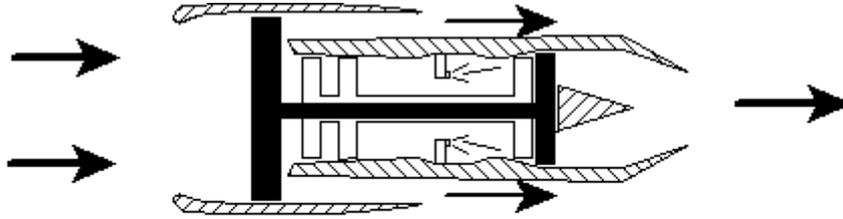
محرّك عنفي-نفاث Turbojet engine
الشكل 7.7

و قد تلا ظهور المُحرّك العنفي النفاث ما يُعرف بالمُحرّك العنفي الدفّاعي (الشكل 7.8)، و الذي يتكون من محرك عنفي نفاث إضافةً إلى دفّاع في منظومة واحدة. و يتمكن بذلك من توفير خواص دفعية تتوسط خواص المحرك الدفّاعي البحت و المحرك العنفي النفاث.



محرّك عنفي-دفّاعي Turboprop engine
الشكل 7.8

أما المحرك العنفي المروحي - الشكل (7.9) و الصورة الفوتوغرافية المملحة - فقد أضيف إلى خيارات الدفع حديثاً و يعطي كفاءة أعلى نسبياً في حالات النقل الأعلى سرعة.



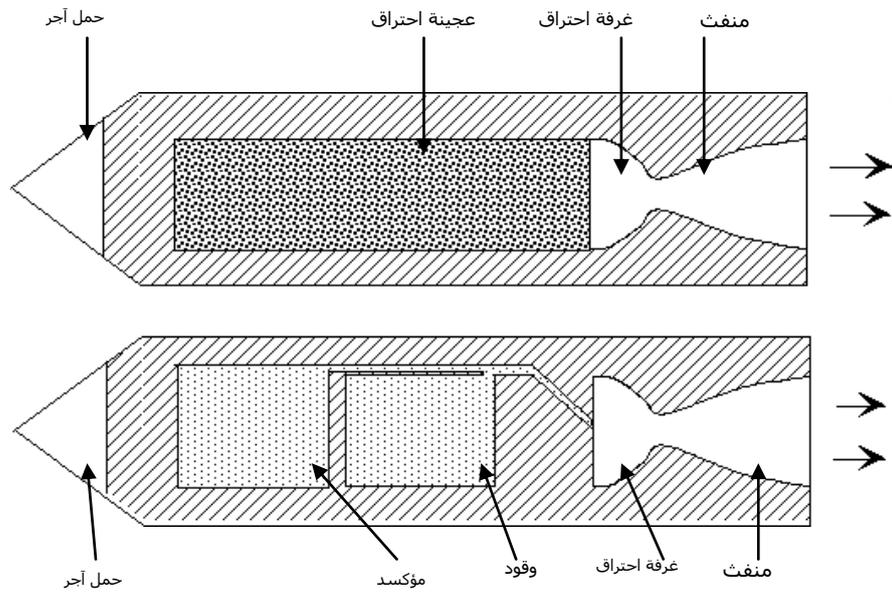
محرك عنفي-مروحي turbopfan engine
الشكل 7.9



7.3 الدفع الصاروخي

السمة الرئيسية للصاروخ هي حملة لكل من الوقود والمؤكسد بداخله بينما يأخذ المحرك النفاث المؤكسد (الهواء) من الجو المحيط. السمة المشتركة بين المحرك النفاث والمحرك الصاروخي هي إحداث تسارع للغازات المحترقة ومن ثم خلق قوة الدفع. يبين الشكل (7.10) الأجزاء الرئيسية للصاروخ بنوعيه: ذي الوقود الصلب وذي الوقود السائل.

صاروخ ذو وقود صلب



صاروخ ذو وقود سائل

الشكل 7.10

يحمل الصاروخ ذو الوقود الصلب خليط (عجينة) من الوقود والمؤكسد بينما يحمل الثاني كل من الوقود والمؤكسد في صُور سائلة.

باعتبار منفث الصاروخ هو حجم التحكم وبالنظر إلى أنه ليس ثمة هواء داخل إلى حجم التحكم عبر السطح (1) فإن المعادلة (1) تعطي

$$F_t = \rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2$$

$$F_t = \rho_2 v_2^2 A_2 + p_2 A_2 = m_2 v_2 + p_2 A_2 \dots \dots \dots (7.8)$$

حيث p_2 هو الضغط فوق الضغط الجوي المحيط بالصاروخ.



- الشكل 7.11 (عن ويكيبيديا): من اليمين إلى اليسار:
- ينسب اختراع الصاروخ للحضارة الصينية القديمة
 - البداية المعاصرة للصواريخ هي ال V2 الذي استحدث في ألمانيا في الأربعينات من القرن العشرين
 - ثم صاروخ حديث لرحلات الفضاء.

مسائل

7.1 دقّاع طائرة يُعطي دفعاً يساوي 4kN عندما تكون سرعة الطائرة 120m/s و عند ارتفاع كثافة الهواء فيه 1.0kg/m^3 . قطر الدفّاع 2.5m . أحسب القدرة الدنيا المطلوبة و السرعة النظرية لتيار الهواء سافل الدفّاع.
[480 kW, 127m/s]

7.2 يتحرك زورق بسرعة 10m/s في ماء ساكن كثافته 1000kg/m^3 . قطر دقّاع الزورق 0.5m . يمر الماء عبر مستوى الدفّاع بمعدل $4\text{m}^3/\text{s}$. أحسب الدفع على الزورق والكفاءة النظرية والقدرة الداخلة للدفّاع. تجاهل الفقد الناشئة عن بدن الزورق وعن سُرة الدفّاع. [83kN , 49% , 1.7MW]

7.3 الأحوال التشغيلية لمحرك نفاث :

0.8m	القطر الدخولي
0.5m	القطر الخرجي
65kg/s	معدل سريان الهواء
1.39kg/s	معدل سريان الوقود
49kPa	الضغط الجوي
51kPa	الضغط الدخولي
70kPa	الضغط الخرجي
293K	درجة الحرارة الدخولية
700K	درجة الحرارة الخرجية

بافتراض أن الهواء الداخل والغازات الخارجة غازات مثالية وباعتبار قيمة R في الحالتين K-287J/kg

(أ) أحسب الدفع

(ب) أحسب القدرة إذا كانت سرعة الطائرة 300km/h

[53.7 kN, 4.5MW]

7.4 معدل سريان خليط الوقود والمؤكسد لمحرك صاروخي 2.5kg/s . تترك الغازات الساخنة منفث الصاروخ بسرعة 600m/s بالنسبة لجسم الصاروخ. الضغط في الغازات الخارجة يساوي الضغط الجوي. سرعة الصاروخ 300m/s . أحسب دفع المحرك والقدرة.
[1.5 kN, 450 kW]

8 حفظ الإضطراب في الصورة التفاضلية

8.1 الصورة العامة للمعادلات

تُكتب معادلات الحفظ في الميكانيكا بصورتين: الصورة التكاملية و الصورة التفاضلية. تستخدم الصورة التكاملية عندما يكون المطلوب هو مقادير شمولية لحجم تحكمي محدد - و كان هذا هو الحال في معظم ما تعرضت له الأبواب السابقة من هذا الكتاب. أما الصورة التفاضلية فتُعنى ببيان توازن معدلات التغير في أي موضع داخل حجم التحكم.

المعادلة (2.7) - مثلاً - معادلة تفاضلية توضح العلاقة بين معدلات تغير مركبات السرعة في الموضع (x, y, z) . بينما المعادلات (2.13) معادلات تكاملية تعطي مركبات القوى العاملة على حجم التحكم. في هذا الباب نحن بصدد معالجة جوانب في ميكانيكا الموائع تستدعي التحليل التفاضلي.

بدءً من المعادلة (2.12) - وهي معادلة حفظ الإضطراب في الصورة التكاملية:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

تُستخدم نظرية التباعد الرياضية - الملحق (ب) - لتحويل التكاملات السطحية في المعادلة إلى تكاملات حجمية، ثم تُشكل الحدود المُكاملة حدود المعادلات التفاضلية المطلوبة. بما أن نظرية التباعد تفترض الاستمرارية في كل المجال فإن المعادلات التفاضلية تستوجب الاستمرارية كذلك. و هذا يجعل الصورة التكاملية للمعادلات أعم من الصورة التفاضلية لأن الأولى لا تستوجب استمرارية المجال.

خلال التحويل يُعرّف المتجه \underline{s} ليحل محل $\nabla \tau$ حيث τ مُركبة الإجهاد القصّي. و يمكن تحليل المتجه \underline{s} في الاتجاهات الثلاث x, y, z كما يلي

$$= s_x \underline{i} + s_y \underline{j} + s_z \underline{k} \underline{s}$$

يقود ذلك للمعادلات الثلاث الآتية و التي تُعرف بمعادلات **نافير-ستوكس** :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + s_x \dots\dots\dots(8.1a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + s_y \dots\dots\dots(8.1b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + s_z \dots\dots\dots(8.1c)$$

حيث u, v, w مركبات السرعة \underline{v} في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

وقد استخلص ستوكس قيم s_x, s_y, s_z كما يلي :

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\}$$

.....(8.2a)

$$s_y = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\}$$

..... (8.2b)

$$s_z = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\}$$

..... (8.2c)

معادلات نافير - ستوكس أعلاه عامة بحيث تشمل السريان ثلاثي البعد، غير الرتيب، الإنضغاطي و اللزجي. ولا يُشترط أن تكون اللزوجة منتظمة القيمة في المجال. إلا أن هذه المعادلات لا تُعطي السريان اللانيوتوني.

8.2 حالات خاصة

8.2.1 السريان اللزجي

عند اعتبار السريان للزجي تصبح المقادير s_x , s_y , s_z في المعادلات (8.1) صفراً. وتعرف المعادلات الثلاث الناتجة بـ **معادلات أويلر**.

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(8.3a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(8.3b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots(8.3c)$$

8.2.2 السريان اللانضغاطي مُنظم اللزوجة

معادلة حفظ الكتلة للسريان اللانضغاطي التي سبق استخلاصها في القسم (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(8.4)$$

بتعويض هذا المقدار في المعادلات (8.2) وملاحظة ثبات قيمة اللزوجة μ تصبح معادلات نافير-ستوكس:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \dots\dots(8.5a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \dots\dots(8.5b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] (8.5c)$$

8.3 حل معادلات نافير - ستوكس

يتعذر حل معادلات نافير- ستوكس في صورتها العامة (8.2) حلاً مضبوطاً. وتكمن الصعوبة في أن الحدود الحملية في الجانب الأيسر للمعادلة غير خطية. إلا أن بعض الحالات الخاصة تسمح بتبسيط المعادلات بحيث يمكن حلها **حلاً مضبوطاً**. و سنمثل لذلك بالحالة في القسم (8.3.1) أدناه. أما في الحالات التي يتعذر فيها الحل المضبوط تُحل المعادلات **حلاً تقريبياً** حيثما يكون ذلك ممكناً أو تستخدم **الطرق العددية**.

8.3.1 السريان المتوازي في مجرى مستقيم (حل مضبوط)

افتراضات هذه الحالة: السريان لاإنضغاطي، منتظم اللزوجة، خطوط انسيابه متوازية، رتيب ولا تؤثر عليه قوى جسمية. عند إعمال هذه الافتراضات في معادلات نافير-ستوكس (8.1) تختزل إلى المعادلة التفاضلية



الشكل 8.1

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \dots\dots\dots(8.6)$$

وباستخدام القيمة الحدودية

$$u = 0 \text{ عند } y = \pm \frac{1}{2}h$$

يعطى تكامل المعادلة (8.6)

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \dots\dots\dots(8.7)$$

8.3.2 النظرية الحركية للتزليق (حل تقريبي)

نميز بدءاً بين التزليق الحركي و التزليق السكوني. يُوفّر الضغط المطلوب لفصل الأجزاء ذات الحركة النسبية في الحالة الأولى من الحركة النسبية نفسها. بينما يُوفّر في الحالة الثانية بوسائل خارجية. ويعالج في هذا القسم النموذج الرياضي للحالة الأولى.



الشكل 8.2

8.3.2.1 المحامل ذات النسبة الباعية الكبيرة

تشمل الافتراضات هنا:

- i. ثنائية أبعاد السريان
- ii. رتبة الحركة
- iii. لاإنضغاطية السريان
- iv. انتظام اللزوجة
- v. صغر القوى الجسمية
- vi. صغر عدد رينولز.

لاإنضغاطية السريان وانتظام لزوجته يختزلان معادلات نافير- ستوكس إلى الصورة (8.5). رتبة الحركة وثنائية البعد وتجاهل القوى الجسمية يختزلن الصورة (8.5) إلى الصورة:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1a)$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1b)$$

لإعمال أسلوب الموازنة الحدية نضع المعادلات (1) في صورة لابعدية ونتخذ لذلك القيم المرجعية الآتية: L للأطوال و U للسرعات و ρU^2 للضغط ؛ حيث L طول المحمل في اتجاه الحركة و U سرعته الثابتة.

وبذلك يمكن تعريف المتغيرات اللابعدية الآتية :

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

باعتبار القيمة **1** للمقدار اللابعدى قيمة كبيرة ومقدّرة و القيمة ϵ صغيرة ويمكن تجاهلها فإن أوزان المقادير اللابعدية أعلاه تصبح

$$x' \sim 1, \quad y' \sim \epsilon, \quad u' \sim 1, \quad v' \sim \epsilon, \quad Re \sim \epsilon$$

الصورة اللابعدية للمعادلات (1a) و (1b)

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right] \dots\dots\dots(2a)$$

$$\sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim 1 \quad \sim \epsilon^{-2}$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dy'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right] \dots\dots\dots(2b)$$

$$\sim \epsilon \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1} \quad \sim \epsilon \quad \sim \epsilon^{-1}$$

وبذلك تُختزل المعادلات (1) نتيجة للتقريب بالموازنة الحدية إلى الصورة:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \dots\dots\dots(8.8)$$

القيم الحدودية للسريان:

$$y = 0, \quad u = U \quad \dots\dots\dots(3a)$$

$$y = h, \quad u = 0 \quad \dots\dots\dots(3b)$$

$$x = 0, \quad p = 0 \text{ (مقياسياً)} \dots\dots\dots(3c)$$

$$x = L, \quad p = 0 \text{ (مقياسياً)} \dots\dots\dots(3d)$$

مع ملاحظة أن h دالة في x .

بمكاملة المعادلة (8.8) مرتين واستخدام القيم الحدودية (3a, 3b)

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} hy - U \frac{y}{h} + U \dots\dots\dots(8.9)$$

ويعطى حفظ الكتلة

$$q = b \int_0^h u dy = \frac{1}{2} b U h - \frac{1}{12} \frac{b h^3}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

مع ملاحظة ثبات قيمة q لكل المقاطع x

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{q}{bh^3} \right) \dots \dots \dots (4)$$

بمكاملة (4) بين الحدود $x = 0$ و x العامة و $h = h_1$ و h العامة (

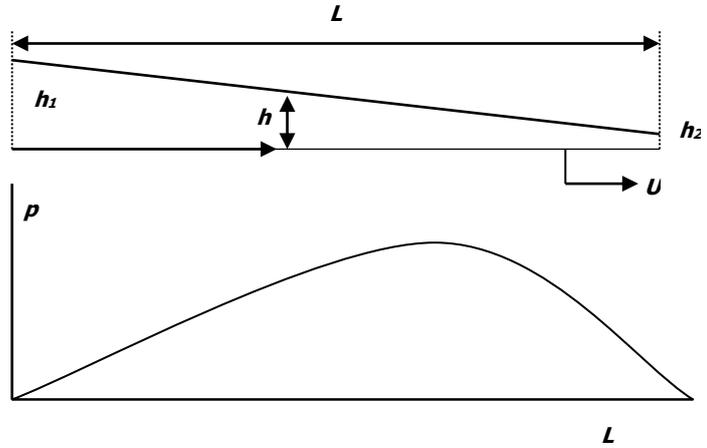
$$p = 6\mu U \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu \frac{q}{b} \int_0^x \frac{dx}{h^3}$$

$$p = 6\mu U \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-2} dh - 12\mu \frac{q}{b} \int_{h_1}^h \frac{dx}{dh} h^{-3} dh \dots \dots \dots (8.10)$$

باستخدام القيمة الحدودية (3d) : $p = 0$ ، $h = h_2$ ، $x = L$ ، تصبح المعادلة (8.10)

$$q = \frac{bU}{2} \frac{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-2} dh}{\int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{dh} h^{-3} dh} \dots \dots \dots (8.11)$$

بتحديد علاقة h بـ x يمكن استخلاص علاقة الضغط p بالإحداثي x . مثال لذلك إذا كان الجانب الأعلى الساكن من المحمل ذا مستوى مستقيماً يمكن أن نستخلص العلاقة $h(x)$ من الشكل (8.3).



الشكل 8.3

$$h = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{x}{L}$$

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{h_1 - h_2}{L}$$

تعطي المعادلة (8.11)

$$q = bU \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \dots\dots\dots(8.12)$$

وتعطي المعادلة (8.10) :

$$p = 6\mu UL \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1^2 - h_2^2)} \dots\dots\dots(8.13)$$

يمكن استنتاج **الجمل** لهذه الحالة من

$$W = b \int_0^L p dx$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (8.13) وإجراء التكامل وبتعريف النسبة $r = \frac{h_1}{h_2}$

$$W = 6 \frac{\mu b L^2 U H_w}{h_2^2} \dots\dots\dots(8.14a)$$

حيث

$$H_w = \frac{\ln r}{[r - 1]^2} - \frac{2}{r^2 - 1} \dots\dots\dots(8.14b)$$

يمكن الوصول، من النظرية والتجربة، إلى أن أعلى حمل يكون عند $r = 2.2$ ويعطي ذلك $H_{WM} = 0.0267$.

وتعطي المعادلة (8.14a) عندها السعة الجمليّة W_M :

$$W_M = 0.16 \frac{\mu b L^2 U}{h_2^2} \dots\dots\dots(8.15)$$

لاستنتاج قوة الإعاقة D على حركة المحمل

$$D = b \int_0^L \tau_w dx \dots\dots\dots(5)$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

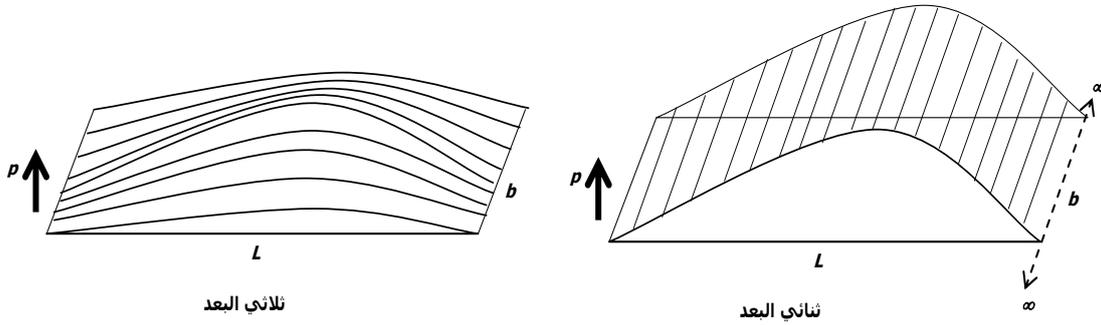
بالتعويض من المعادلات (8.9) ، (8.12) و (4) في المعادلة (5)

$$D = \frac{2\mu b L U}{h_1 - h_2} H_D \dots\dots\dots(8.16)$$

حيث

$$H_D = 2 \ln r - 3 \frac{r - 1}{r + 1}$$

8.3.2.2 المحامل ذات النسبة الباعية الصغيرة



الشكل 8.4

الافتراضات لهذه الحالة مطابقة للحالة السابقة باستثناء أن أبعاد السريان ثلاثة وليست اثنين. ويمكن ملاحظة أن ممال الضغط في الاتجاه العرضي ليس صغيراً مما يقلل من المستوى العام للضغط (الشكل 8.4).

نبدأ ثانيةً من معادلات نافير-ستوكس ونطبق بدءاً الاختزال **المضبوط** للمعادلات ثم نعقب **بالتقريب**. وتكون النتيجة لهذه الحالة :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots \dots \dots (8.17a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots \dots \dots (8.17b)$$

عند دمج المعادلات (8.17) بمعادلة حفظ الكتلة يُعطين ما يُعرف ب **معادلة رينولز للتزليق**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{dh}{dx} \dots \dots \dots (8.18)$$

عند حل المعادلة (8.18) بالطرق العددية تُبث أن النتيجة تقارب تلك التي حصلنا عليها من السريان ثنائي البعد إذا كانت النسبة الباعية b/L كبيرة.

تبعاً لذلك يمكن تحويل المعادلة (8.14) لتعبر عن السريان ثلاثي البعد في الصورة:

$$W = K .6 \frac{\mu b L^2 U H_w}{h_2^2} \dots \dots \dots (8.19)$$

حيث يعتمد معامل التصحيح K على b/L كما في القائمة (8.1).

القائمة (8.1): تغير معامل التصحيح بالنسبة الباعية

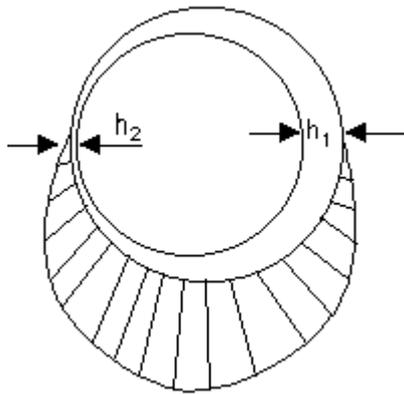
b/L	0.25	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0	1.5	2.0
K	0.06	0.085	0.140	0.185	0.34	0.44	0.61	0.68

3.0	4.0	5.0	6.0	∞
0.775	0.835	0.885	0.94	1.0

و يمكن تقريب النتيجة أعلاه في المدى ($b/L \leq 6$) للعلاقة الرياضية

$$K = 0.2936 \ln(b/L) + 0.4352 \quad \dots\dots\dots(8.20)$$

8.3.2.3 المحمل الحلقي



التحليل في الأقسام (8.3.2.1) و (8.3.2.2) اختص بمحامل مستقيمة القاعدة. يمكن إتباع نفس التحليل للحالة الخاصة بالمحمل الحلقي بفرد أحد جوانب المحمل الحلقي طولياً على استقامته، مع إبقاء المسافة h كما هي في المحمل الحلقي الأصل. و من ثم تحديد $h(x)$ وإجراء التحليل كما سبق.

مثال 8.1

الطول الأفقي لمحمل مستقيم في اتجاه الحركة يساوي 60mm . عرض المحمل 300mm . الارتفاعات الأعلى و الأصغر للفجوة 0.10mm و 0.05mm، على التوالي. كثافة زيت التزليق 900kg/m^3 ولزوجته 0.1Pa.s . إذا كانت سرعة المحمل 0.5m/s أحسب:

- (أ) الحمل
- (ب) الإعاقه
- (ج) القدرة المفقودة في المحمل
- (د) الزيادة في درجة الحرارة لزيت التزليق إذا كانت قيمة الحرارة النوعية c_p 1000J/kg-K

$$5 = 300/60 = b/L \quad \text{(أ)}$$

قيمة K المستخدمة في المعادلة (8.19) تساوي 0.885

$$= 0.0265H_w = \frac{\ln(2)}{[2-1]^2} - \frac{2}{(2)^2 - 1}$$

$$= 3.04E3 W = 0.885(6) \frac{(0.1)(0.3)(0.06)^2 0.5(0.0265)}{(50E-6)^2}$$

الحمل = **3.04 kN**

عند استخدام المعادلة (8.20) يكون الحمل 3.12kN بفرق 2.6% عن النتيجة السابقة.

(ب) المعادلة (8.16)

$$= 13.9D = \frac{2(0.1)0.3(0.06)0.5}{(100-50)E-6} \left[2\ln(2) - 3 \frac{50E-6}{150E-6} \right]$$

الإعاقة = **13.9N**

(ج) الفقد في القدرة الناشئ عن الإعاقة $D.U =$

$$D.U = (13.9)(0.5) = \mathbf{7W}$$

(د) بإدراك أن الفقد في القدرة P الذي حسب أعلاه يتحول إلى حرارة

$$P = c_p m \Delta T = c_p \rho q \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{P}{c_p \rho q}$$

المعادلة (8.12) تعطي معدل السريان الحجمي

$$q = 5E-6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$= 1.6K = \mathbf{1.6^\circ C} \Delta T = \frac{7}{1000(900)5E-6}$$

8.3.3 حوسبة الموائع

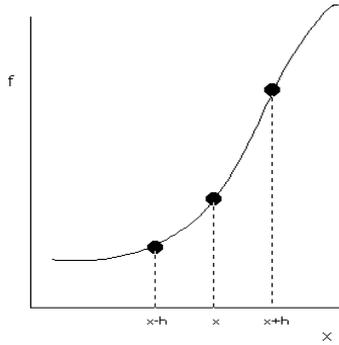
حوسبة الموائع هي العلم الذي يُعني بحل المعادلات الرياضية عددياً للتنبؤ ب:

- سريان الموائع
- انتقال الحرارة
- انتقال الكتلة
- التفاعل الكيميائي.

و تتكامل الحوسبة مع التجربة و الاختبار و تقل بذلك تكلفة التطوير الهندسي. يعتمد أسلوب حوسبة الموائع على استبدال الحل المباشر لمعادلات الحفظ بحل مجموعة مكافئة من المعادلات الجبرية الخطية. و تستخدم أحد الطرق العددية الآتية:

1. طريقة الفروق المحددة
2. طريقة الأحجام المحددة
3. طريقة العناصر المحددة

سنكتفي هنا بإعطاء شرح موجز لطريقة الفروق المحددة.



الشكل 8.6

8.3.3.1 طريقة الفروق المحددة

تُستبدل حدود المعادلات التفاضلية بنسب الفروق و تستنبط منها معادلات جبرية. يُسمى هذا التبدل **التفريز العددي**. يبنّي التفريز العددي على السلسلة الرياضية المعروفة بـ **سلسلة تيلور**.

و يمكن تصوير ذلك بتأمل الدالة $f(x)$ الموضحة في الشكل (8.6).

مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x+h)$ ، حيث h إزاحة صغيرة، هو:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (8.21)$$

و مفكوك سلسلة تيلور للدالة f عند الموضع $(x-h)$ هو:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (8.22)$$

ب طرح أو جمع المعادلتين نحصل على المشتقة $\frac{df}{dx}$ أو المشتقة $\frac{d^2f}{dx^2}$ ، على التوالي:

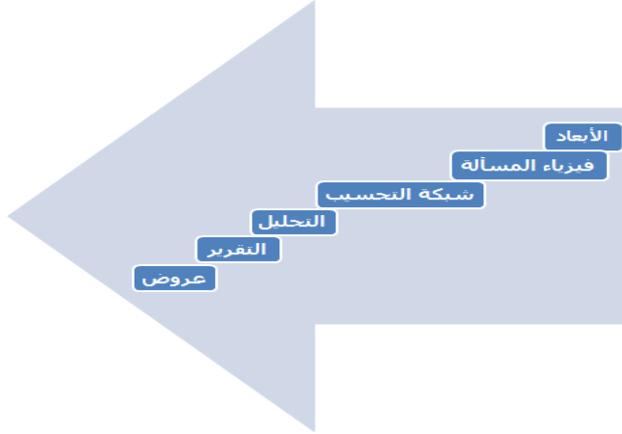
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^2) \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + O(h^2) \quad (8.24)$$

حيث تعني $O(h^n)$ حدود من الدرجة n ، أو ما بعدها. و معلوم أن هذه الحدود تكون صغيرة إذا كانت h صغيرة.

المعادلات أعلاه توضح كيف يمكن أن تقرب حدود المعادلات التفاضلية الحاكمة إلى حدود مفروزة تحسب عددياً عند مواضع موزعة في مجال السريان.

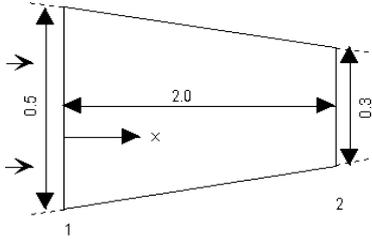
8.3.3.2 الوسائل



من البرامج التجارية السائدة اليوم:

- فلوينت (Fluent)
- ترانسيس (Transys)
- فونيكس (Phoenix)
- سيأف اكس (CFX)
- كومسول (Comsol)

مسائل



الشكل 8.7

8.1 يوضح الشكل (8.7) جزءاً من مجرى لام مستوي ينقل سائلاً بالمعدل الثابت $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

بافتراض انتظام السريان في كل المقاطع استنتج تعبيراً عن التسارع "الكامل" عند المقطع العام x ثم استنتج قيمته العددية عند المقطعين (1) و (2).

إذا زيد معدل السريان زيادة مضطردة تساوي $0.1 \text{ m}^3/\text{s}^2$ لكل متر عرضي أحسب التسارع الكامل في المقطعين (1) و (2) عندما يصبح معدل السريان $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ لكل متر عرضي.

[0.20 m/s^2 , 0.93 m/s^2 , 0.71 m/s^2 , 2.70 m/s^2]

8.2 سريان رتيب لالزجي و لاإنضغاطي يمكن تعريف مجالي السرعة والقوة الجسمية فيه بالمعادلتين :

$$\underline{v} = ax \underline{i} - ay \underline{j}$$

$$\underline{B} = -\rho g \underline{k}$$

إذا كان الضغط عند نقطة الأصل p_0 أثبت أن توزيع الضغط في المجال يعبر عنه بالمعادلة:

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2) - \rho g z .$$

8.3 سريان صفائحي رتيب و لاإنضغاطي بين لوحين متوازيين المسافة بينهما h . يتحرك اللوح الأعلى في مستواه بالسرعة $U \underline{j}$ - بينما يظل اللوح الآخر ساكناً .

(أ) أثبت أن المعادلة أدناه تعطي حلاً مضبوطاً لمعادلات نافير-ستوكس:

$$\frac{u}{U} = \left[-\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \right] \underline{i}$$

خذ نقطة الأصل للمنظومة على اللوح الساكن .

(ب) في حالة خاصة لهذا السريان ، الذي يعرف بسريان **كوويت** ، الفجوة بين اللوحين 10 mm وسرعة اللوح المتحرك $0.1 \underline{j} \text{ m/s}$. باعتبار أن اللزوجة الحركية للمائع تساوي

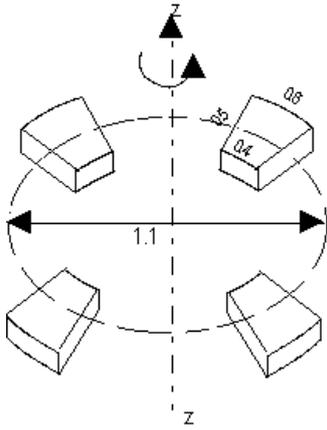
$0.05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ أرسم التغير المتوقع ل $\frac{u}{U}$ مع $\frac{y}{h}$ للحالات الآتية:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\frac{dp}{dx} = 1 \text{ Pa/m} \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{dp}{dx} = -1 \text{ Pa/m} \quad \text{(iii)}$$

وحدد اتجاه القوة المؤثرة على اللوح المتحرك في كل حالة.



الشكل 8.8

8.4 يوضح الشكل (8.8) محمل دفعي مكون من أربع قطع متطابقة صمم لحمل مولد كهربائي يدور حول المحور zz . يمكن اعتبار كل من القطع الأربع حذاءً مستوي ومائل واعتبار أن المولد يسبب حركياً يساوي 3MN . باعتبار اللزوجة الحركية للمزلق $0.04\text{Pa}\cdot\text{s}$ ونسبة سمكي طبقة الزيت الأعلى إلى الأدنى 2.0 قدر السرعة الدورانية للمولد بحيث لا يقل السمك الأدنى لطبقة الزيت عن $50\text{E-}6\text{m}$.
ملحوظة: قَرِّب شكل الحذاء إلى مستطيل. [93 rpm]

8.5 ارتفاع الفجوة في محمل حذائي يتغير مع اتجاه الحركة x حسب المعادلة

$$h = a e^{-bx}$$

حيث a و b ثوابت .

(أ) استخلص علاقة للضغط p بدلالة h, h_2, h_1, L, U, μ

(ب) كون تعبيراً عن المقدار اللابعدي $\frac{p}{\rho UL/h_2^2}$ و ارسم منحناه بدلالة h/h_2 عند

$$h_1/h_2 = 2.0$$

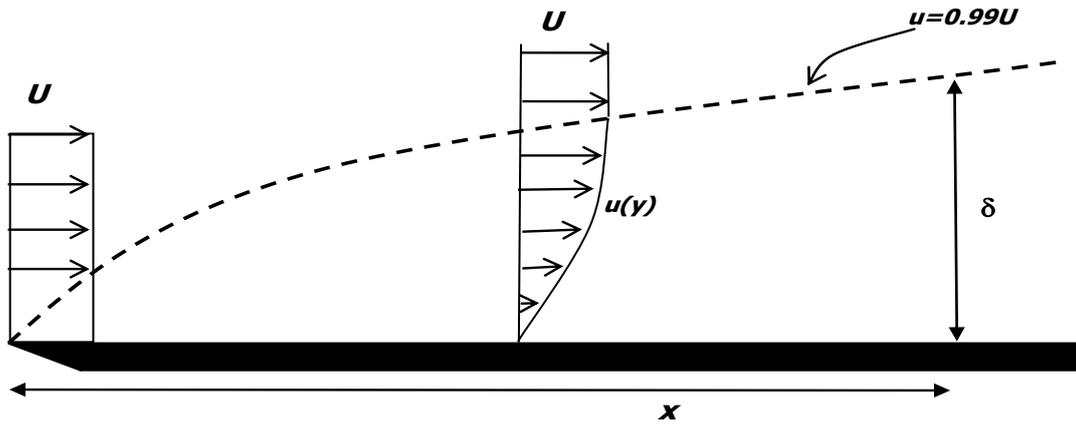
(ج) أرسم المنحنى المقابل للحذاء المستقيم على نفس المناط للمقارنة.

9 الإعاقَة

9.1 مقدمة

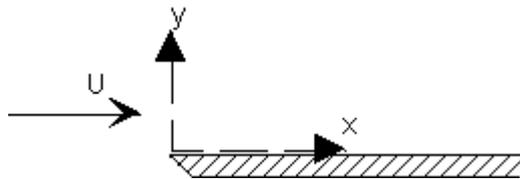
صعوبة التحليل الرياضي العام للسريان الكامل دفع إلى تقسيم مجال السريان لقسمين: أولهما السريان ضئيل التأثير بالجدران الحاوية، مما يضعف فيه ممالات السرعة ويجعل اللزج ضئيل الأثر، ويُعرف هذا القسم بـ **السريان اللالزجي** أو **السريان الكَمُون**. والقسم الثاني هو السريان المتأثر بممالات السرعة ويغلب فيه الأثر اللزجي، ويسمى **سريان الطبقة الجدارية**. ونحن في هذا الباب معنيون بدراسة هذا الأخير بينما نؤخر دراسة السريان اللالزجي للباب العاشر.

9.2 معادلات الطبقة الجدارية



الشكل 9.1

يوضح الشكل (9.1) تكوّن الطبقة الجدارية على لوح رفيع السُمك على استقامة السريان. ويُلاحظ تغير السرعة مع المسافة y ، حتى تبلغ موضعاً لا يُرى فيه تغيراً يذكر. ويعرف هذا الموضع بـ **حد الطبقة الجدارية**. ويؤخذ عادةً على أنه الموضع الذي تُساوي فيه السرعة $0.99U$ ، حيث U السرعة المنتظمة عند المقطع x بعيداً عن اللوح. أول من قدم هذه الصورة للطبقة الجدارية وشفّعها بالتحليل هو **لودفيك برانتل**.



الشكل 9.2

يمكن أن نرى هنا ما ذكر في المقدمة عن الممال

وقيمته داخل وخارج الطبقة الجدارية، و من ثم $\frac{du}{dy}$

التفكر في المعادلة (1.3):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

حيث يكون القص τ ذا قيمة مقدرة داخل الطبقة الجدارية، بينما يمكن تجاهله خارجها. ويمكن أن نرى أيضاً أن الطبقة الجدارية أوضح وأكثر تحديداً في السريان ذي القيمة العالية لعدد رينولز.

في التحليل الآتي لسريان الطبقة الجدارية نفترض:

- السريان رتيب، لإنضغاطي و ثنائي البعد.
- القوى اللزجية ذوات وزن حدي مشابه للقصور الذاتي.
- الجدار الصلب الذي يتاخم السريان هو لوح مستقيم حاد الحافة ومواز للتيار الخارجي. ويعني ذلك أن زاوية الهجوم تساوي صفر .

القيم الحدودية للسريان في الطبقة الجدارية:

$$y = 0 : \quad u = 0 \quad v = 0$$

$$y \rightarrow \infty : \quad u = U \quad du/dy = 0$$

بإعمال الافتراضات الأولى على معادلات نافير- ستوكس تُختزل المعادلات إلى الصورة :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

المعادلة (1) في الصورة اللابعدية:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \dots\dots\dots(4)$$

يتم وزن الحدود في المعادلة (4) كما يلي: الحد الأخير في الجانب الأيمن (داخل القوس) وزنه $1/\epsilon^2$. عند ضربه في وزن المقدار $1/Re$ ينبغي أن يعطي الوزن 1 ليزن الجانب الأيسر للمعادلة - حسب الافتراض الثاني، وهذا يجعل وزن عدد رينولز $1/\epsilon^2$.

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

الموازنة الحدية إذن تختزل المعادلة (4) إلى الصورة

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dp'}{dx'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

و بالرجوع للصورة البعدية

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(9.1)$$

عند إعمال الموازنة الحدية على مفكوك المعادلة (2) مستعينين بمعرفتنا الآن لوزن عدد رينولز يمكننا موازنة المعادلة الثانية

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon^3 \quad \varepsilon$

نجد أن أكبر الحدود بوزن ε . بذلك يمكن إغفال هذه المعادلة من معادلات نافير-ستوكس.

معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$1 \quad 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (9.2)$$

تعرف المعادلة (9.1) ب **معادلة برانتل للطبقة الجدارية** .

أما خارج حدود الطبقة الجدارية فإن القيم الحدودية تصبح:

$$y \geq \delta, \quad u = U, \quad du/dy = 0, \quad d^2u/dy^2 = 0$$

وتصير المعادلة (9.1)

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \dots \dots \dots (9.3)$$

قدّم **فون كارمن** حلاً للمعادلة (9.1) للسريان في الطبقة الجدارية في الصورة:

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(U-u)dy + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U-u)dy \dots \dots (9.4)$$

يمكن استنتاج الآتي من حل فون كارمن:

- (1) إذا ثبت الضغط في المجال فإن الحد الأخير يصبح صفراً.
- (2) لحساب الإجهاد القصي على الجدار τ_w نحتاج لمعرفة توزيع السرعة $u(y)$.
- (3) تصلح المعادلة (9.4) لكل من السريان الصفائحي والسريان المائل، بشرط استخدام دالة السرعة المناسبة.

9.3 حل فون كارمن عند ممال الضغط صفر

عند $dp/dx = 0$ تأخذ المعادلة (9.4) الصورة :

$$\tau_w = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u(U-u) dy$$

وصورتها اللابعدية

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d \frac{y}{\delta} \right]$$

وبتعريف القيم اللابعدية η و ϕ

$$\phi = \frac{u}{U}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

نحصل على

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \phi(1-\phi) d\eta \right] \dots\dots\dots(9.5)$$

9.3.1 الطبقة الجدارية الصفائحية

بالاستفادة من معادلة السريان النيوتوني (1.3) التي تربط الإجهاد القصي بممال السرعة

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right)_{\eta=0}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu}{\rho U \delta} \left. \frac{d\phi}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

يمكن حساب $\left. \frac{d\phi}{d\eta} \right|_{\eta=0}$ عددياً إذا عرفت الدالة $\phi(\eta)$. وتعرّف هنا α كقيمة عددية لهذا الممال

اللابعدي.

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\mu \alpha}{\rho U \delta} \dots\dots\dots(1)$$

تُحَدِّد المعادلة (1) بذلك الجانب الأيسر من معادلة فون كارمن.

أما الجانب الأيمن للمعادلة فيتحدد بمعرفة $\phi(\eta)$ و نرسم لهذا المقدار التكامل بالحرز β

$$\beta = \int_0^1 \phi(1-\phi) d\eta \dots\dots\dots(2)$$

بالتعويض من المعادلتين (1) و (2) في (9.5) :

$$\delta d\delta = \frac{\mu\alpha}{\rho U \beta} dx$$

وَنُعْطِي المَكْمَلَةَ

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{2\mu\alpha}{\rho U \beta}\right)x} \dots\dots\dots(9.6)$$

المعادلتان (1) و (9.6) تعطيان

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{2\rho U}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \dots\dots\dots(9.7)$$

وبإجراء التكامل ل τ_w على مساحة لوح عرضه b وطوله L

$$D = b\sqrt{2\alpha\beta\rho\mu LU^3} \dots\dots\dots(9.8)$$

نعرف هنا C_f ، معامل الإعاقة الجلدية

$$c_f = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

$$c_f = \sqrt{8\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \dots\dots\dots(9.9)$$

النتائج التجريبية التي حصل عليها بلازيوس

$$\left. \frac{\delta}{x} \right|_{\varphi=0.99} = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} \dots\dots\dots(9.10a)$$

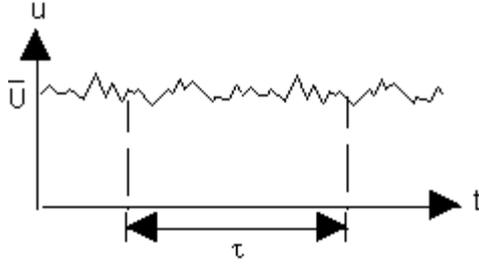
$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}} \dots\dots\dots(9.10b)$$

$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \dots\dots\dots(9.10c)$$

9.3.2 الطبقة الجدارية المائرة

خصائص عامة للسريان المائري

1 جزئيات السريان المائري لا تنزلق في صورة صفائح كما هو الحال للسريان الصفائحي ولكنها تتحد في كتيلات وتنفصل باستمرار وتحرك في كل الاتجاهات - مع محصلة سرعة في اتجاه السريان الرئيسي - الشكل (9.3).



الشكل 9.3

إذا اهتممنا مثلاً بالسرعة في الاتجاه x ، وأسمايناها u ، فإن u ترتبط عند أي وقت t بالسرعة المتوسطة \bar{u} و الاضطراب u' ، حيث

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u dt$$

و حيث τ هنا فترة الرصد .

وتعرف **جدة المور** T كما يلي:

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)}}{U_{\infty}} \dots \dots \dots (9.11)$$

ويمكن اختزال المعادلة (9.11) إلى الصورة أدناه إذا كانت خصائص التورم لاتجاهية:

$$T = \frac{\sqrt{\bar{u}^2}}{U_{\infty}}$$

2 من خصائص السريان المائري انه بجانب الفقد اللزجي تنشأ فيه فقود إضافية بسبب "عشوائية" حركة الكتيلات، وهي:

(أ) فقد بسبب الحركة في الاتجاه العرضي.

(ب) فقد بسبب الصدم المتواصل.

وينشأ عن ذلك ما يعرف ب **إجهادات رينولز** .

3 يتحول السريان من صفائحي إلى مائري عند عدد رينولز الحرج، Re_c .

للسريان في الأنابيب المدى الحرج لعدد رينولز

$$2E3 < Re_c < 10E3$$

وللسريان على الألواح المستوية ($T \sim 0.5\%$)

$$0.35E6 < Re_c < 1E6.$$

الإجهاد القصي الكلي في الطبقة الجدارية المائرة يشمل الإجهاد اللزجي البسيط - المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي - و إجهاد قصي إضافي ناشئ عن المور. الإجهاد المعبر عنه في معادلة نيوتن للسريان الصفائحي:

$$\tau_l = \mu \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{du}{dy}$$

ويعبر عن الإجهاد القصي الإضافي الناشئ عن المور بمعادلة **بوسينسك**

$$\tau_l = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \dots\dots\dots(9.12)$$

وتسمى τ_l **الإجهاد الموري الظاهري** و ε **اللزوجة الظاهرية**.

ترتبط اللزوجة الظاهرية بمتغيرات السريان:

$$\varepsilon = \varepsilon (u', v', w', \text{مמالات السرعة,})$$

وتستخلص هذه الدالة بالتجربة.

تمكننا التعريفات المذكورة من **نمذجة المور** بإعادة صياغة المعادلات (9.1) و (9.2) لتشمل السريان المائر:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \dots\dots(9.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(9.14)$$

تشابه المعادلة (9.13) للطبقة الجدارية المائرة المعادلة (9.1) للطبقة الجدارية الصفائحية في هبئهما الرياضية. و من ثم يمكن الإفادة من حلول فون كارمن (9.4) و (9.5). تحتاج المعادلة (9.5) في هذا التطبيق لتحديد دالة السرعة وطبيعة الإجهاد القصي الجداري للسريان المائر. و بناءً على التجربة يمكن اعتماد الدالة أدناه للسريان المائر:

$$\varphi = \eta^{1/4} \dots\dots\dots(9.15)$$

دلت تجارب **بلازيوس** في الإجهاد القصي الجداري المائر على الأسطح **الناعمة** إلى الصيغة التجريبية:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \text{Re}_\delta^{-1/4} \dots\dots\dots(9.16)$$

تصلح المعادلة (9.16) للسريان المائر على الألواح المستوية في المدى $5E5 < \text{Re}_x < 1E7$

نمضى الآن في تحليل سريان الطبقة الجدارية المائرة بالتركيز على اللوح المستوي ذي السطح الناعم. باستخدام نتيجة بلازيوس

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \text{Re}_\delta^{-1/4} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4}$$

و استخدام القانون الأسّي لتوزيع السرعة

$$\varphi = \frac{u}{U} = \eta^{3/4}$$

تعطي المعادلة (9.5) :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \varphi(1-\varphi) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{3/4} = \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \eta^{3/4} (1-\eta^{3/4}) d\eta \right]$$

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{3/4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} \delta \right)$$

$$\delta^{3/4} d\delta = 0.0225 \frac{72}{7} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{3/4} dx$$

ويُعطي التكامل

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} \dots \dots \dots (9.17)$$

بمقارنة المقدار $x^{4/5}$ للسريان المائل مع المقدار $x^{1/2}$ للسريان الصفائحي نرى أن الطبقة الجدارية المائلة تنمو بمعدل أكبر من معدل نمو الطبقة الجدارية الصفائحية.

بوضع المعادلة (9.17) في صورة لابعدية

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 \text{Re}_x^{-1/5} \dots \dots \dots (9.18)$$

ونلاحظ ضعف اعتماد سمك الطبقة الجدارية على عدد رينولز مقارنةً بالسريان الصفائحي. من المعادلتين (9.16) و (9.18) نحصل على تعبير عن القص الجداري اللابعدية:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0288 \text{Re}_x^{-1/5} \dots \dots \dots (9.19)$$

بمكاملة (9.19) على اللوح نحصل على الإعاقة الجلدية D

$$D = b \int_0^L \tau_w dx = 0.036 b \rho \nu^{1/5} L^{4/5} U^{9/5}$$

وتدل التجربة إلى أن المعامل الأدق هو **0.037**

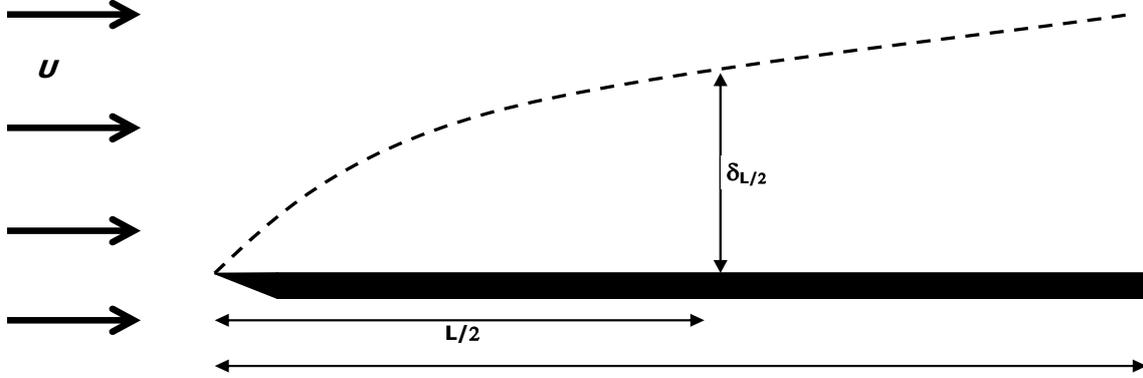
$$D = 0.037 b \rho \nu^{1/5} L^{4/5} U^{9/5} \dots \dots \dots (9.20)$$

ثم نحصل على معامل الإعاقة الجلدية

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = 0.074 \text{Re}_L^{-1/5} \dots \dots \dots (9.21)$$

مثال 9.1

سريان على لوح ناعم بممال ضغط صفري. طول اللوح متر واحد وعرضه 0.3 متر. اللزوجة الكينماتية للمائع $1\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$ وكثافته $1000\text{kg}/\text{m}^3$. السرعة الخارجية للتيار $0.7\text{m}/\text{s}$.



الشكل 9.4

- (أ) إذا أمكن إبقاء السريان صفائحياً على كل اللوح أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية على كل اللوح.
- (ب) إذا رُجَّ السريان صعيد اللوح بحيث أصبحت الطبقة الجدارية مائرة تماماً أحسب سمك الطبقة الجدارية عند منتصف طول اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية على كل اللوح.

(أ) في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية تُعطي نتائج بلازيوس :

$$\delta_x = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$Re_{L/2} = 0.35\text{E}6, \quad \delta_{L/2} = 4.2\text{E-}3 \approx \mathbf{4\text{mm}}$$

$$Re_L = Re_{1.0} = 0.7\text{E}6$$

قوة الإعاقة D :

$$D = \frac{1}{2}\rho U^2 b L C_f$$

$$= 0.0016 C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}$$

$$D = \frac{1}{2}(1000)(0.7)^2 (0.3)(1.0)(0.0016) = \mathbf{0.12\text{N}}$$

(ب) في حالة الطبقة الجدارية المائرة

$$Re_{L/2} = 0.35\text{E}6$$

و تعطي المعادلة (9.18)

$$\delta_{0.5} = 0.014 = 14\text{mm}$$

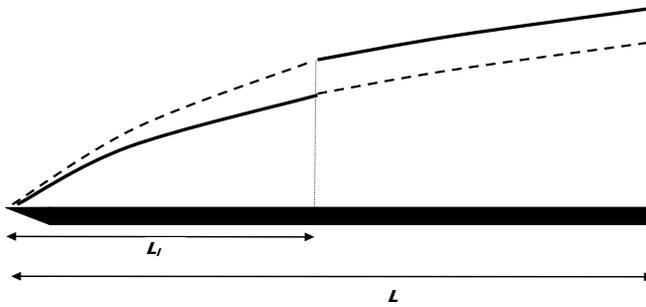
و من المعادلات (9.20) و (9.21)

$$Re_L = 0.7\text{E}6, \quad C_f = 0.005$$

$$D = \frac{1}{2}(1000)(0.7)^2 (0.3)(1.0)(0.005) = \mathbf{0.37\text{N}}$$

9.3.3 الطبقة الجدارية الهجين

في القسمين السابقين (9.3.1) و (9.3.2) تم تحليل سريان الطبقة الجدارية الصفائحية والطبقة الجدارية المائرة على حدة لتبسيط التحليل. ما يحدث عادةً في الطبيعة أن تكون الطبقة الجدارية صفائحية في البدء (مقدمة اللوح) ثم تتحول عند قيمة رينولز الحرجة إلى طبقة جدارية مائرة. يجاور اللوح في هذه الحالة ما يعرف بالطبقة الجدارية الهجين - الشكل (9.5).



الشكل 9.5

نريد هنا حساب قوة الإعاقة الجارية الناشئة عن الطبقة الجدارية الهجين بافتراض أن التحول من الحالة الصفائحية إلى المائرة يتم في مسافة قصيرة يمكن تجاهلها واعتبار التحول موضعي. نعلم في هذا التحليل على الاستنباط المنسوب إلى برانتل و القائل: **عقب مقطع**

التحول يمكن اعتبار شكل الطبقة الجدارية امتداداً لطبقة جدارية مائرة وهمية تبدأ عند مقدمة اللوح .

إذن القيمة الكلية للإعاقة D تساوي :

الإعاقة المورية على طول L - الإعاقة المورية على طول L_l + الإعاقة الصفائحية على طول L_l .

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 b \left[\frac{0.074L}{Re_L^{1/5}} - \frac{0.074L_l}{Re_{L_l}^{1/5}} + \frac{1.328L_l}{Re_{L_l}^{1/2}} \right] \dots\dots\dots(9.22)$$

مثال 9.2

المعطيات مماثلة لمعطيات المثال السابق باستثناء أن الطبقة الجدارية هنا هجين، حيث تتحول من صفائحية إلى مائرة عند عدد رينولز الحرج $0.4E6$. المطلوب حساب قوة الإعاقة الجلدية.

$$\frac{UL_l}{\nu} = \text{عدد رينولز الحرج}$$

$$Re_c = \frac{UL_l}{\nu} = 0.4E6$$

$$L_l = \frac{Re_c \nu}{U} = 0.57m$$

$$Re_L = 0.7(1.0)/1E-6 = 0.7E6, \quad Re_{L_l} = 0.4E6$$

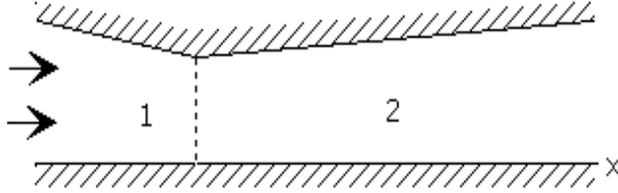
المعادلة (9.22) تعطي

$$D = \frac{1}{2} (1E3)(0.7)^2 (0.3)(1.0) \left[\frac{0.074}{(0.7E6)^{1/5}} - \frac{0.57}{1.0} \frac{0.074}{(0.4E6)^{1/5}} + \frac{0.57}{1.0} \frac{1.328}{(0.4E6)^{1/2}} \right] = \mathbf{0.22N}$$

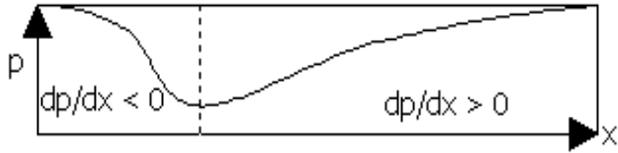
نذكر أن الإعاقة تساوي 0.12N لهذه المعطيات في حالة الطبقة الجدارية الصفائحية، و 0.37N لحالة الطبقة الجدارية المائرة.

9.4 الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفري

مما سبقت دراسته عن الطبقات الجدارية التي يساوي ممال الضغط فيها صفر نرى أن الإجهاد القصي الجداري τ_w و ممال السرعة الجداري $du/dy|_{y=0}$ يتناقضان مع زيادة x - المعادلتان (9.7) و (9.19). إلا أن قيمهما لا تهبط إلى الصفر مهما كبرت قيمة x . وعند تأمل ممال السرعة نرى أن اتجاه السرعة u لا ينقلب أبداً في هذه الحالة.



لدراسة ما يمكن أن يحدث لممال السرعة قرب الجدار في حالة ممال ضغط لا يساوي صفر نتفكر في السريان اللانضغاطي داخل المجرى اللام-الناشر الموضح في الشكل (9.6).



الشكل 9.6

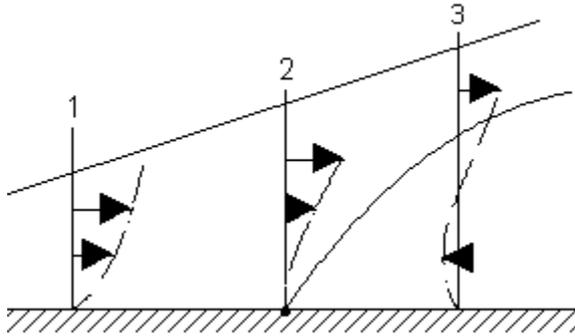
معادلة الاستمرارية، ثابت $vA =$ ، تدل إلى أن السرعة المتوسطة v تتزايد في الجانب اللام لتبلغ مداها عند الحلق ثم تتناقص في الجانب الناشر. و بالتعويض لذلك في معادلة حفظ الطاقة في صورتها المثالية:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{ثابت}$$

نحصل على توزيع الضغط الموضح في الشكل (9.6) و نرى فيه أن ممال الضغط سالب في الجانب الصعيدي و موجب في الجانب السافلي. ماذا يحدث إذن للطبقة الجدارية النامية على الجدار المستقيم؟

(أ) في الجانب الصعيدي، حيث $\frac{dp}{dx} < 0$ ، فإن الضغط خلف كل جزيء قرب الجدار أعلى من

الضغط أمام الجزيء. وهذا يؤدي إلى أن لا تهبط سرعة الجزيء إلى الصفر قط .



الشكل 9.7

(ب) في الجانب السافلي، حيث $\frac{dp}{dx} > 0$ ،

فإن الضغط خلف كل جزيء يقل عن الضغط أمامه. وهذا يؤدي إلى احتمال هبوط السرعة هناك إلى الصفر. ونعرف من التجربة أن الحالة $\frac{dp}{dx} > 0$ حالة ضرورية لهبوط السرعة إلى

الصفر ولكنها ليست كافية. و بافتراض زاوية

تباعد كبيرة نسبياً يهبط ممال السرعة $\frac{du}{dy}$ عند

الجدار إلى الصفر و يصبح توزيع السرعة كالمُبين في المقطع (2) في الشكل (9.7).

ما يلي ذلك في اتجاه السريان x هو انعكاس اتجاه السرعة، $\frac{du}{dy} < 0$ ، و يتكون مجال سريان يدور

فيه المائع موضعياً. ويسمى السريان في هذه الحالة سريان **منفصل** .
ظاهرة الفصل تصاحبها مزار عديدة في التطبيقات الهندسية وينبغي التيقن من غياب مسبباتها عند التصميم أو استخدام أحد الوسائل المتبعة لتقليص حدوثه.

9.5 الفصل و الإعاقة الضغطية في السريان الخارجي

9.5.1 السريان عبر أسطوانة

نبدأ بدراسة سريان مثالي ثنائي البعد محكوم بمعادلة برنولي في الصورة :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ثابت}$$

ونرى أن خضوع السريان لهذا الفرض يؤدي إلى تماثل خطوط السريان حول الأسطوانة، و أن الضغط p والمقدار $\frac{1}{2} \rho v^2$ متماثلان حول المحور الرأسي - الشكل (9.8).

بمتابعة مستوى الضغط في خط السريان 3-2-1 فإن مثالية السريان تعني

$$p_3 = p_1$$

أي أن الضغط يُستردّ تماماً عند الموضع (3) .

هذه هي الصورة المثالية للسريان عبر

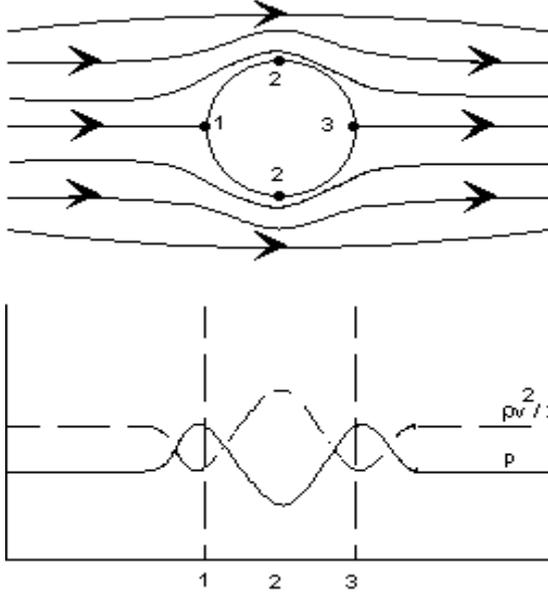
الأسطوانة. ما هي الصورة الفعلية؟

يبطئ السريان قرب السطح 3-2-1 بسبب قيد اللانزلاق - الشكل (9.9). وهو القيد الذي يؤدي لتكوين طبقة جدارية على السطح. ويعني تكون الطبقة الجدارية وجود ممالات سرعة و من ثم احتكاك لزجي و فقد في الطاقة.

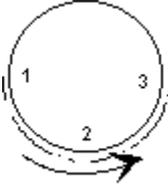
في المسار 2-1 تتزايد السرعة و ينخفض الضغط و يؤدي الاحتكاك اللزجي إلى فقد في الطاقة الحركية. و هذا يعني أن محتوى الطاقة المفيد أقل من محتوى الطاقة في حالة السريان المثالي. و يتبع ذلك في المسار 3-2 استحالة استرداد كل قيمة الضغط p_1 عند الموضع 3 بسبب الفقد المذكور و أن ينخفض الضغط سافل الأسطوانة عن نظيره صعيد الأسطوانة، أي

$$p_1 - p_3 > 0$$

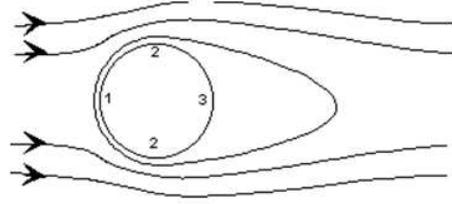
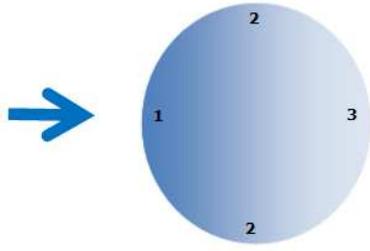
و تنشأ بذلك قوة إعاقة على الاسطوانة في الاتجاه 1 إلى 3. و تؤدي dp/ds الموجبة في المسار 2 إلى 3 إلى انفصال الطبقة الجدارية.



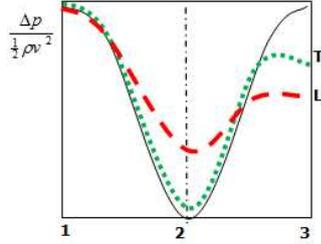
الشكل 9.8



الشكل 9.9

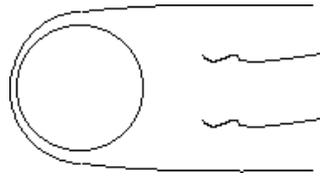


الشكل 9.10

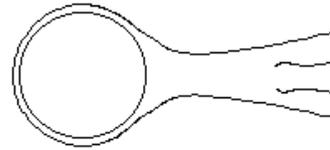


الشكل 9.10 ب

1



صفائحي



مائتر

الشكل 9.11

عند مقارنة السريان المائتر عبر الأسطوانة بالسريان الصفائحي نرى أن توزيع الضغط في حالة السريان المائتر أقرب إلى التوزيع المثالي - الشكلين (9.10) و (9.11). و نرى الطبقة الجدارية الصفائحية أسرع في الانفصال من الطبقة الجدارية المائتر. ويُعزى ذلك إلى أن **الخلط الموري** في حالة السريان المائتر يُغذي الطبقة الجدارية بطاقة حركية مستمدة من التيار الرئيسي مما يؤدي إلى تنشيط الطبقة الجدارية وتأخير انفصالها.

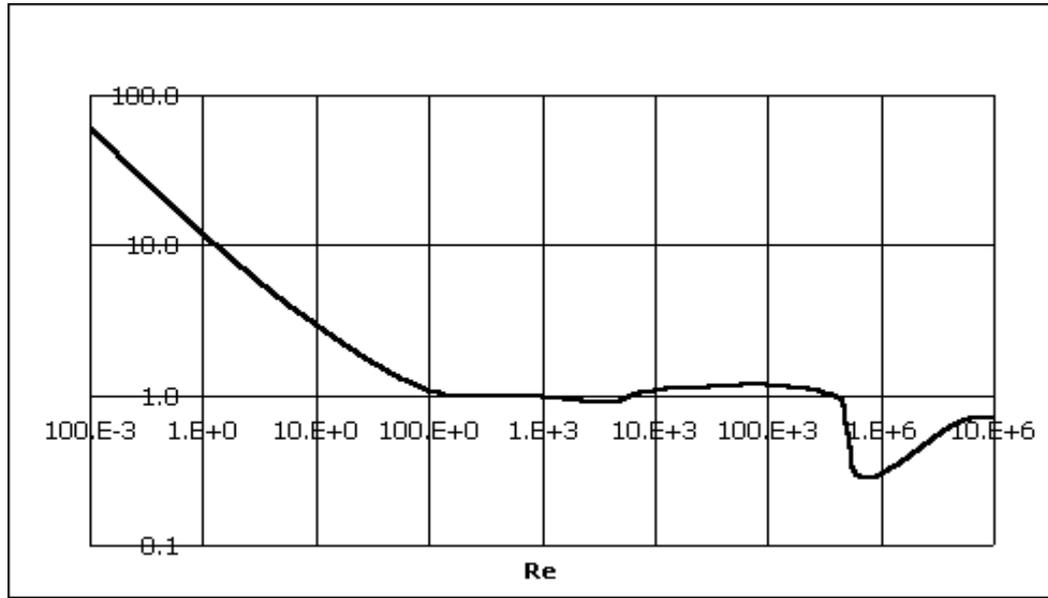
يعرف المقدار $(p_1 - p_3)A$ ب **الإعاقة الضغطية**، حيث A هي المساحة المواجهة للسريان. و يسبب هذه الإعاقة انفصال الطبقة الجدارية. **الإعاقة الجلدية**، من الجانب الآخر، يسببها السريان غير المنفصل.

يُعرّف **المعامل الكلي للإعاقة** C_D كما يلي :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \dots \dots \dots (9.23)$$

حيث D قوة الإعاقة.

يعتمد هذا المعامل على عدد رينولز، و يوضح الشكل (9.12) هذه الصلة لأسطوانة ذات نسبة باعية عالية.



الشكل (9.12)

مثال 9.3

قَدِّر عزم الثني على قاعدة مدخنة أسطوانية ارتفاعها 20m معرّضة لرياح سرعتها 15m/s قطر المدخنة 1.5m . الضغط الجوي ودرجة الحرارة 0.1MPa و 30°C على التوالي. اللزوجة الكينماتية 2.5E-6m²/s.

$$Re = vd/\nu = 9E6$$

يُعطي المنحنى في الشكل (9.12) عند هذه القيمة لعدد رينولز $C_D = 0.7$. وتُعطي معادلة الغاز الكامل كثافة الهواء بمعرفة الضغط والحرارة.

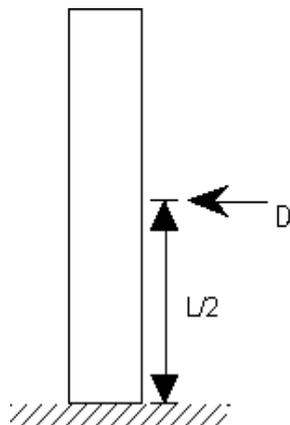
$$\rho = \frac{p}{RT} = 1.15 \text{ kg/m}^3$$

$$25\text{m}^2 = Ld = \text{المساحة المواجهة للتيار}$$

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho A v^2 = 2717\text{N}$$

العزم M

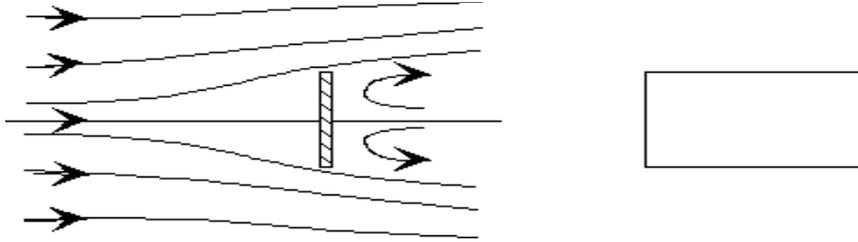
$$M = \frac{1}{2} LD = 27167 \text{ Nm}$$



الشكل 9.13

9.5.2 الإعاقة على ألواح رقيقة متعامدة على السريان

(أ) لوح مسطح مستطيل:



الشكل 9.14

معامل الإعاقة C_D للوح مستطيل ومواجه تماماً للتيار:

$$C_D = 1.17 + 0.012 (b/h) \dots\dots\dots(9.24)$$

في الحدود: $Re_h > 1000$ و $1 < b/h < 20$

(ب) قرص :

$$C_D = 1.17 \dots\dots\dots(9.25)$$

في الحدود: $Re > 1000$

(ج) نصف كرة مفرغة :

في الحدود: $Re > 1000$

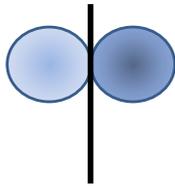
$$C_D = 1.42 \dots\dots\dots(9.26a)$$

التيار يواجه الجانب المقعر

$$C_D = 0.38 \dots\dots\dots(9.26b)$$

التيار يواجه الجانب المحدب

مثال 9.4



الدوّار الموضح في الشكل (9.15) يراد استخدامه عند سرعة هواء 3m/s . كثافة الهواء 1.1 kg/m^3 . العزم المطلوب حول نقطة الدوران 0.1Nm . أحسب نصف قطر شبه الكرة.

عزم الدوران =

$$= F_1 R - F_2 R = (F_1 - F_2)R$$

حيث F_1 و F_2 القوى على نصفي الكرة و R نصف قطر الكرة .

$$(F_1 - F_2)R = \frac{1}{2} \rho A v^2 (C_{D1} - C_{D2}) R = \frac{1}{2} \pi R^3 v^2 (C_{D1} - C_{D2})$$

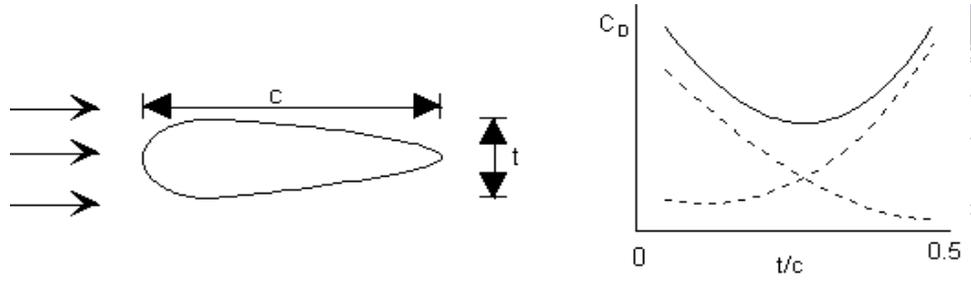
$$0.1 = \frac{1}{2} \pi (1.1) R^3 (9)(1.42 - 0.38)$$

$$R = 0.18 \text{ m}$$

نصف القطر المطلوب $0.18 \text{ m} \leq$

الشكل (9.15)

9.5.3 الجُنَّيح



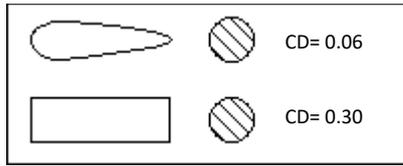
الشكل 9.16

الجنيح هو المقطع التجريبي للجناح أو ريش آلات الموانع. ويصمم ليقلل من تأثير الضغط الموجب سافل القطاع الأكثر سمكاً عند استخدامه في الحالة التصميمية. كما يراعى في تصميمه الموائمة بين الإعاقة الضغطية والإعاقة الجلدية لتعطيان إعاقة كلية دنيا كما هو موضح في الشكل (9.16).

9.6 التحكم في الطبقة الجدارية

9.6.1 الانسيابية

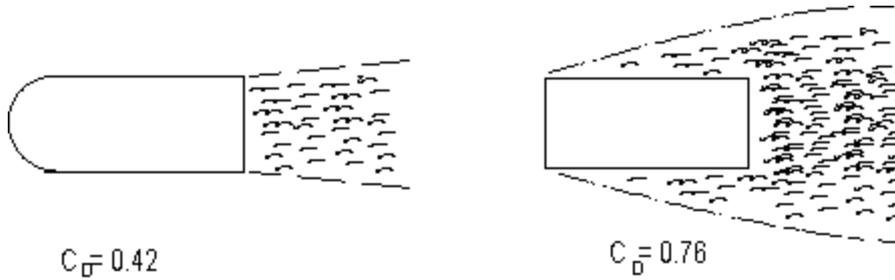
تعني الانسيابية أن الشكل الخارجي للجسم يُشكّل خطوط الانسياب الطرفية للسريان بحيث تُعطي الحجم الأدنى للدوامات، و من ثم القدر الأدنى من الإعاقة. المثال في الشكل (9.17) يوضح أن الشكل المعروف بالقطرة، مثلاً، يعطي معامل إعاقة 0.06 بينما يعطي الشكل الاسطواني لنفس القطر معامل إعاقة 0.3 .



الشكل 9.17

ونرى شكل الأجسام الهندسية المعرضة للإعاقة الحركية - مثل: بدن الطائرة، محركات الطائرة النفاثة، الغواصة و الصاروخ - يُقرب إلى القطرة.

يستخدم مُصنعو السيارات الأنفاق الهوائية للوصول إلى تصميمات تعطي إعاقة حركية صغيرة. الشكل (9.18) يبين أثر الانسيابية في خفض الإعاقة و هو مستمد من تقرير تجريبي عن حافلة فلوكسفاغن.



الشكل 9.18

عند تقدير الإعاقة الكلية على حركة السيارة نراعي أنه بالإضافة إلى الإعاقة الحركية هنالك إعاقة الطريق الناتجة عن حركة الإطارات على الطريق. فالإعاقة الكلية R تساوي الإعاقة الحركية R_A مضافاً إليها إعاقة الطريق R_R

$$R = R_A + R_R = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho A U^2 + C_R W t \dots (9.27)$$

حيث Wt وزن السيارة و C_R معامل الطريق.

القدرة P المجابهة للإعاقة

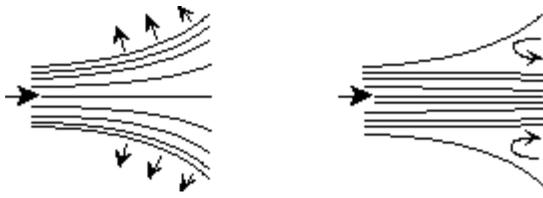
$$P = R U \dots (9.28)$$

تُعطي القائمتان أدناه قيمة تقريبية للمعاملات C_D و C_R

C_R	نوع الطريق
0.1 - 0.3	رمل
0.08	تربة (نصف صلبة)
0.04	حصى
0.02	أسفلت قديم
0.01	أسفلت جديد
0.0027	قضبان حديدية

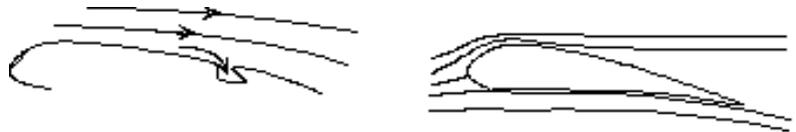
C_D	نوع العربة
0.8 - 1.0	شاحنة
0.6 - 0.8	حافلة
0.6 - 0.7	شاحنة صغيرة
0.2-0.5	صالون

9.6.2 الامتصاص



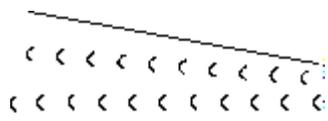
الشكل 9.19

يمكن التحكم في الطبقة الجدارية بامتصاص المائع من منطقة الانفصال بوسائل خارجية. ويبدو في الشكل (9.19) تطبيق لهذه الوسيلة في سريان داخلي (ناشر). و تدل التجربة إلى أن الفصل لا يحدث في الناشر إذا كانت زاوية النشر تقل عن 7° . في الشكل (9.20) تطبيق لأسلوب الامتصاص على سريان خارجي (جنيح).



الشكل 9.20

9.6.3 تنشيط الطبقة الجدارية

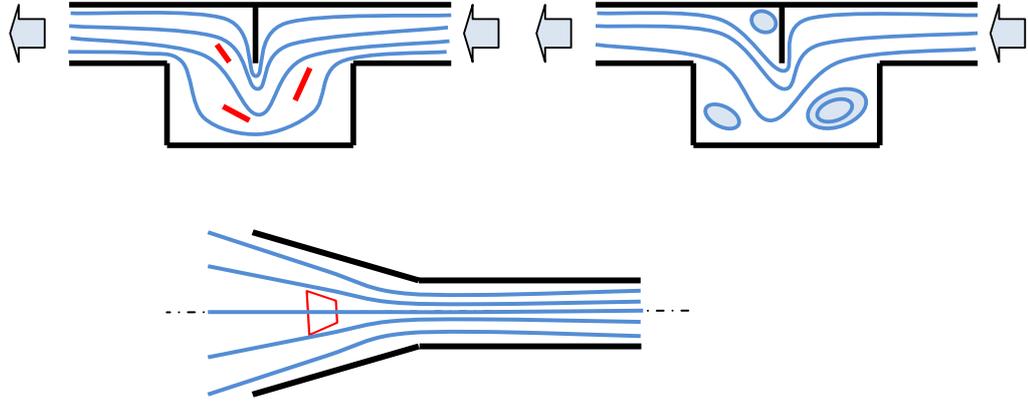


الشكل 9.21

يحدث انفصال الطبقة الجدارية، كما سبق الذكر، بسبب فقدان السريان لجزء من طاقته بسبب الاحتكاك اللزجي في الطبقة الجدارية. وتعتمد طريقة التنشيط على إضافة طاقة من التيار الرئيسي بخلق دوامات مورية بواسطة ريش صغيرة تعرف بمولدات الدوامات. وهذه من أكثر الطرق استخداماً في تصميم أجنحة الطائرات. الشكل (9.21).

9.6.4 الريش الساكنة

تستخدم الريش الساكنة في السريان الداخلي للتحكم في خطوط الانسياب و الحد من انفصال الطبقة الجدارية. يوضح الشكل (9.22) تطبيقان لهذه الوسيلة في مجرى لسريان غير منتظم الاتجاه و مجرى ناشر.



الشكل 9.22

مسائل

[حيث تحتاج لكثافة الهواء أعتبرها 1.2kg/m^3]

9.1 سريان صفائحي عبر لوح مسطح بزواوية هجوم صفر وبممال ضغط صفر. بافتراض أن توزيع

السرعة في الطبقة الجدارية من الدرجة الثانية استخلص تعبيراً عن $\frac{\tau_w}{\rho U^2}$ و C_f بدلالة Re . قارن

نتائجك بنتائج بلازيوس التجريبية.

[$0.365Re_x^{-1/2}$, $1.461Re_L^{-1/2}$]

9.2 يسري هواء بسرعة 2.2m/s على استقامة لوح مسطح طوله 0.5m وعرضه 0.3m

للزوجة الكينماتية $20\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$ والكثافة 1.2kg/m^3 . أحسب سمك الطبقة الجدارية عند ذيل اللوح وأحسب الإعاقة الجلدية .

[11mm , $2.47\text{E-}3\text{ N}$]

9.3 عدد رينولز لسريان على استقامة لوح مسطح $5\text{E}6$. يتحول السريان من صفائحي إلى مائر

عند البعد $0.4L$ من مقدمة اللوح، حيث L طول اللوح.

(أ) أحسب معامل الإعاقة الجلدية، C_f

(ب) أحسب القدرة اللازمة لتثبيت اللوح في سريان سرعته الرئيسية 2m/s وكثافته 1000

kg/m^3 إذا كان طول اللوح 1.0m وعرضه 0.4m . [0.00213 , 3.4N , 6.8W]

9.4 يمكن اعتبار جناح الطائرة لوح مسطح باستقامة السريان لحساب التقديرات الأولى للتصميم.

في حالة محددة باع 7.5m لجناح ووتره 2.0m وسرعة الطيران 320 m/h . للزوجة الكينماتية للهواء $20\text{E-}6\text{m}^2/\text{s}$ و الكثافة 0.95kg/m^3 .

(أ) بافتراض أن السريان مائر على كل الجناح قدر الإعاقة على الجناح .

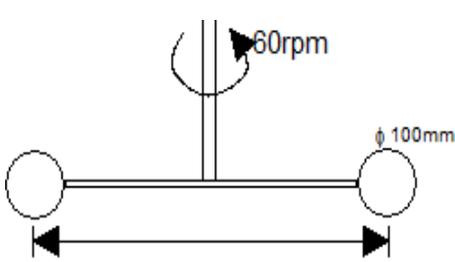
(ب) بأي مقدار تقل القدرة المطلوبة إذا أمكن التحكم في الطبقة الجدارية لتصبح صفائحية

على كل الجناح. [340N , 25.8kW]

9.5 يهبط مظلي عمودياً بمظلة بسرعة 5m/s . وزن المظلي والمظلة 1kN . باعتبار أن المظلة

[7.7m]

نصف كرة مفرغة قدر قطرها.



9.6 يوضح الشكل (9.23) خلاط دوّار يستخدم لخلط

محلول كثافته 1100g/m^3 . في طرفي الدوار قرصان

معدنيان مثبتان في المستوى الرأسي. قطر أذرع الخلاط

صغير ويمكن تجاهل أثره الحركي. أحسب عزم اللي

والقدرة اللازمين لتشغيل الخلاط .

[86 Nm , 541W]

9.7 المساحة الأمامية لسيارة 2.2m^2 و وزنها الكلي 20kN . معامل الإعاقة الحركي 0.5 . إذا

استخدمت السيارة على طريق مسفلت متوسط الحال ($C_R = 0.015$) أحسب السرعة التي تتجاوز

عندها الإعاقة الحركية إعاقه الطريق. أحسب أيضاً القدرات اللازمة عند السرعتين 120 km/h و 100

[77km/h ; 34.4kW , 22.5kW]

10 الرفع

10.1 خصائص السريان اللالزجي

يعني هذا الفصل بدراسة الأنموذج الرياضي للسريان اللالزجي اللانضغاطي. تجعل هذه الافتراضات معادلات الحفظ بسيطة إلا أنها تظل وافية للتعبير عن طائفة من التطبيقات الهندسية المهمة. و نهتم هنا بصفة خاصة بالتطبيق ذي الصلة بقوة الرفع. و سيقصر التحليل على السريان الرتيب ثنائي البعد.

نحتاج في هذا الفصل للتعريفات الآتية :

(أ) دالة السريان ψ

المركبات u و v مركبات لمتجه السرعة \underline{V} في الاتجاهين x و y لسريان ثنائي البعد

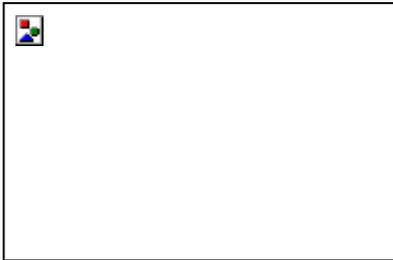
$$\underline{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \dots\dots\dots(10.1)$$

يمكن استبدال المتغيرات المعتمدة u و v بمتغير مُعتمد واحد هو ψ باستخدام علاقات التحويل:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \dots\dots\dots(10.2)$$

بهذا التعريف تحقق الدالة ψ معادلة الاستمرارية :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.3)$$



الشكل 10.1

(ب) السريان اللادوراني

يعرف السريان بأنه لادوراني إذا لم يكن لأي من أجزائه حركة دورانية خالصة.

يمكن من الشكل (10.1) استنتاج أن السرعة الزاوية المتوسطة تساوي:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ونرى من ذلك أن مقدار دوران أي من أجزاء المائع تتناسب مع المقدار داخل القوسين. وبذلك يمكن تعريف السريان اللادوراني بأنه الذي يحقق المعادلة

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.4)$$

يمكن أيضاً إثبات أن الدوران يرتبط فقط بالسريان اللزجي. ويظل السريان لادورانياً إذا كان لالزجياً وبدأ لادورانياً .

(ج) دالة الكُمون ϕ

يوصف السريان بأنه ذو كُمون إذا وُجدت دالة ϕ تعرف متجه السرعة

$$\underline{v} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \underline{j}$$

حيث

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots(10.5)$$

ويمكن ملاحظة أن المعادلة (10.5) تحقق المعادلة (10.4).

(د) معادلتى لابلاس لـ ψ و ϕ

بقرن المعادلتين (10.2) و (10.4) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(10.6)$$

وبقرن المعادلتين (10.5) و (10.3) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(10.7)$$

(هـ) المناط القطبي

نعيد هنا صياغة المعادلات (10.1) إلى (10.7) بدلالة الإحداثيات القطبية θ و r .

متجه السرعة \underline{v} :

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta \dots\dots\dots(10.8)$$

دالة السريان ψ :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \dots\dots\dots(10.9)$$

دالة الكُمون ϕ :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(10.10)$$

معادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (10.11)$$

السريان اللادوراني:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (10.12)$$

معادلتني لابلاس:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \dots \dots \dots (10.13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \dots \dots \dots (10.14)$$

(و) السريان المنتظم

يعرّف متجه السرعة للسريان المنتظم بالمعادلة: $\underline{V} = U\hat{i}$

فتكون $u = U$ و $v = 0$

ويتبع ذلك

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \dots (1)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \dots (4)$$

مكاملة (1) تعطي

$$\psi = Uy + f(x)$$

وبالمفاضلة والمقارنة مع (2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) = 0$$

$$\psi = Uy + c_1 \dots \dots \dots (5)$$

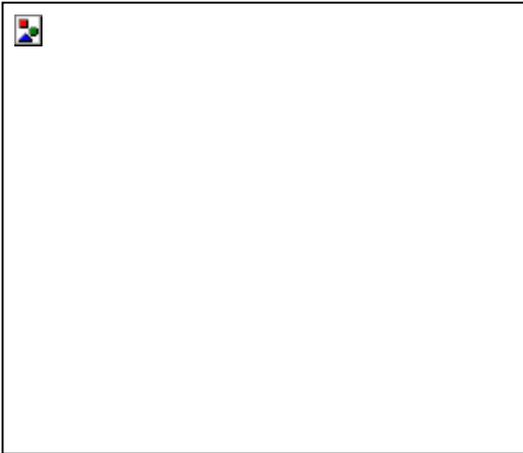
مكاملة (3) تعطي

$$\phi = Ux + g(y)$$

وبالمفاضلة والمقارنة مع (4)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = g'(y) = 0$$

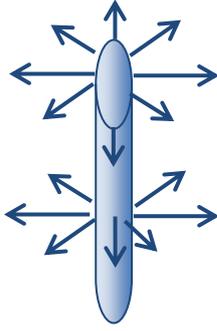
$$\phi = Ux + c_2 \dots \dots \dots (6)$$



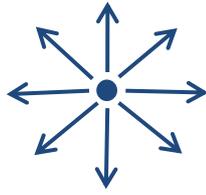
الشكل 10.2

الشكل (10.2) يصور السريان المنتظم عند

$$U = 1 \text{ m/s}, c_1 = c_2 = 0$$



منبع خطي



منبع نقطة

الشكل 10.3

(ز) المنبع والمصب

يُعرّف المنبع في هذا التحليل بأنه الموضع الذي ينبع منه المائع إشعاعياً والمصب هو الموضع الذي يختفي عنده المائع الداخل إشعاعياً. يوضح الشكل (10.3) ما يعرف بالمنبع النقطة و المصب النقطة و المنبع الخطي و المصب الخطي . يستخلص من التعريف أعلاه أن السرعة الزاوية للسريان في المنبع والمصب v_θ تساوي صفر. بذلك يكون معدل السريان الحجمي q لوحدة طول واحدة في المنبع الخطي

$$q = 2\pi r v_r$$

باستخدام المعادلة (10.9):

$$q = 2\pi r v_r = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + f(r)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = f'(r) = -v_\theta = 0$$

$$f(r) = \text{ثابت} = c_1$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta + c_1 \dots \dots \dots (1)$$

تعطي المعادلة (10.10)

$$q = 2\pi r \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

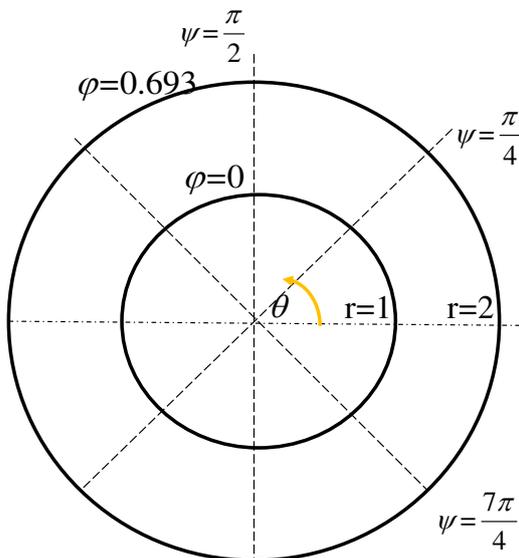
$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} g'(\theta) = v_\theta = 0$$

$$g(\theta) = \text{ثابت} = c_2$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + c_2 \dots \dots \dots (2)$$

يبين الشكل (10.4) سريان منبع (مصب) عند

$$\frac{q}{2\pi} = 1, \quad c_1 = c_2 = 0$$



مثال 10.1

يُعرّف سريان لإنضغاطي بالمعادلة $\psi = xy$

- (أ) أرسم لهذا السريان بعض خطوط الانسياب على المستوى الموجب لـ $x-y$.
 (ب) أكتب معادلة متجه السرعة.
 (ج) بين أن السريان لادوراني وأكتب التعبير الدال على دالة الكُمون.

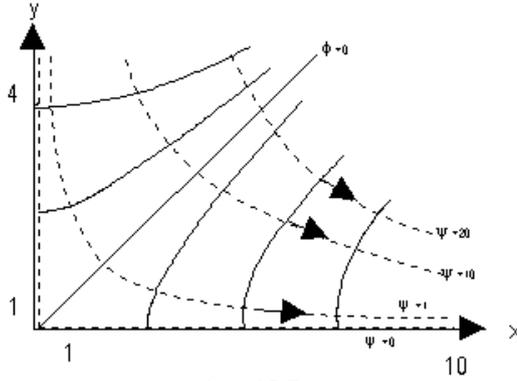
(أ) خطوط الانسياب :

عند خط الانسياب $\psi = 0$: لكل قيم y ، $x = 0$ ،
 لكل قيم x ، $y = 0$.

عند خط الانسياب $\psi = 1$: $y = 1/x$

عند خط الانسياب $\psi = 10$: $y = 10/x$

عند خط الانسياب $\psi = 20$: $y = 20/x$



الشكل 10.5

(ب) متجه السرعة \underline{V} :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$

$$\underline{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$$

ويمكن استنتاج اتجاهات خطوط الانسياب من توزيع السرعة أعلاه.

- (ج) ليكون السريان لادوراني ينبغي تحقيق المعادلة (10.4) .
 ومن (ب) أعلاه

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ويحقق ذلك المعادلة (10.4)

لتحديد دالة الكُمون

$$u = x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 + f(y)$$

$$= f(y) = -y \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$f(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$$

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + c$$

10.2 اختزال معادلات نافير-ستوكس لحالة السريان الللزجي

10.2.1 الصورة العامة للمعادلات

عند افتراض أن السريان للزجي و لاإنضغاطي يمكن تبسيط معادلات نافير-ستوكس من الصورة (8.1) باعتبار المتجه اللزجي \underline{S} يساوي صفر فتأخذ المعادلات الثلاث الصورة التالية في مناط ديكارتي:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \dots (10.15a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \dots (10.15b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots (10.15c)$$

و قد سبقت كتابة هذه المعادلات، المعروفة بمعادلات أويلر، بالترقيم (8.3).

و في المناط الأسطواني :

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = B_r - \frac{\partial p}{\partial r} \dots (10.16a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \dots (10.16b)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = B_z - \frac{\partial p}{\partial z} \dots (10.16c)$$

مثال 10.2

المعادلة أدناه تمثل توزيع السرعة في مجال ثلاثي البعد لسريان رتيب:

$$\underline{V} = cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j} - 2cz\mathbf{k}$$

(أ) أثبت أن السريان لاإنضغاطي.

(ب) باعتبار المحور z رأسي و أن الكثافة تساوي 1000kg/m^3 و الثابت c يساوي 1.0 s^{-1}

أحسب ممال الضغط عند النقطة $(1,1,5)$.

(أ) معادلة الاستمرارية للسريان اللانضغاطي ثلاثي البعد (المعادلة 8.4):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

وفي هذا المثال: $u = cx$, $v = cy$, $w = -2cz$

و هي تحقق المعادلة أعلاه و تحقق بالتالي الاستمرارية اللانضغاطية.

(ب) بالتعويض لقيم u , v , w في معادلات أويلر (10.15) و بملاحظة أن :

$$\underline{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} = 0 + 0 - \rho g\mathbf{k}$$

تعطي (10.15a)

$$\rho[c^2x] = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - 1000(1)^2(1) = - 1000\text{ Pa/m}$$

و تعطي (10.15b)

$$= - 1000\text{ Pa/m} \frac{\partial p}{\partial y}$$

و تعطي (10.15c)

$$\rho[-2cz(-2c)] = - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - 4c^2z\rho = -1000(9.81+60) = - 29810\text{ Pa/m}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k} = - 1000\mathbf{i} - 1000\mathbf{j} - 29810\mathbf{k}$$

10.2.2 معادلة برنولي

باعتبار السريان ثنائي البعد لادوراني و لاإنضغاطي مع تجاهل القوى الجسمية تُختزل المعادلات (10.15) إلى الصور:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(2)$$

المعادلة (10.4) - شرط حال اللادوران:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(10.4)$$

من المعادلتين (1) و (10.4)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(y) \dots\dots\dots(3)$$

وبالمثل تُعطي المعادلتان (2) و (10.4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = g(x) \dots\dots\dots(4)$$

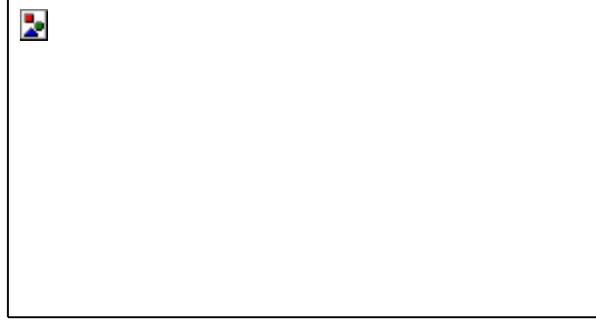
وتعطي المعادلتان (3) و (4)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{ثابت} \dots\dots\dots(10.17)$$

وتعرف (10.17) ب **معادلة برنولي**.

يمكن ملاحظة أن المعادلة تشابه معادلة الطاقة التي سبق استخلاصها في الباب الثاني، ألا أنه ينبغي الانتباه إلى أن السرعة و الضغط في معادلة برنولي قيم محددة عند مواقع محددة في خطوط السريان بينما القيم المقابلة في معادلة الطاقة هي متوسطات لهذه المتغيرات عند المقاطع المشار إليها.

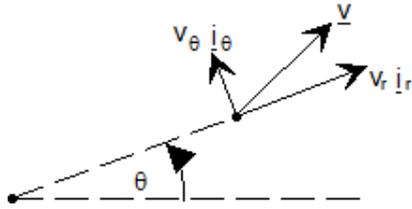
10.3 السريان اللادوراني عبر اسطوانة



الشكل 10.6

نبدأ هذا التحليل بالعلاقة التفاضلية للكُمون φ كعلاقة حاكمة للسريان:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \dots \dots \dots (10.14)$$



الشكل 10.7

مع القيم الحدودية :

$$r = a, \quad v_r = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad \dots (1 \text{ ح } 1)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad v_r = -U \cos \theta \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = -U \cos \theta \quad \dots \dots \dots (2 \text{ ح } 2)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad v_\theta = U \sin \theta \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = U \sin \theta \quad \dots (3 \text{ ح } 3)$$

لحل المعادلة (10.14) باستخدام طريقة الضرب

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R' \Theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R'' \Theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = R \Theta', \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R \Theta''$$

وبالتعويض في المعادلة (10.14)

$$R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} = k$$

وتعطي المعادلة الأخيرة المعادلتين :

$$r^2 R'' + r R' - k R = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Theta'' + k \Theta = 0 \dots\dots\dots(3)$$

توجد ثلاثة احتمالات لقيمة k :

$$k = \lambda^2 \leftarrow k \text{ موجبة (أ)}$$

$$k = -\lambda^2 \leftarrow k \text{ سالبة (ب)}$$

$$k = 0 \quad \text{(ج)}$$

حيث λ عدد حقيقي .

ويكون الحل العام للمعادلة (10.14) هو مجموع حواصل ضرب الحلول R و Θ عند كل من حالات k

الثلاث :

$$\varphi = R \Theta|_{k=\lambda^2} + R \Theta|_{k=-\lambda^2} + R \Theta|_{k=0}$$

يمكن الاستنتاج أن الحل العام $\varphi(r, \theta)$ يأخذ الصورة :

$$\begin{aligned} \varphi = & [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] \\ & + [c_3 \cos \lambda r + c_4 \sin \lambda r] [c_9 \theta^\lambda + c_{10} \theta^{-\lambda}] \\ & + [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}] \end{aligned}$$

بملاحظة أن φ ليست دالة دورية في r فإن السطر الثاني في الحل أعلاه يختفي

$$\varphi = [c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}] [c_7 \cos \lambda \theta + c_8 \sin \lambda \theta] + [c_5 + c_6 \ln r] [c_{11} \theta + c_{12}] \dots(4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \gamma [c_1 r^{\gamma-1} - c_2 r^{\gamma-1}] [c_7 \cos \gamma \theta + c_8 \sin \gamma \theta] + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots\dots\dots(5)$$

يمكن تحقيق القيمة الحدودية (ق ح 2) بالآتي :

$$\gamma = 1, \quad c_1 c_7 = -U, \quad c_8 = 0$$

وتصبح المعادلة (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{r^2}\right) + \frac{c_6}{r} [c_{11} \theta + c_{12}] \dots\dots\dots(6)$$

وتعطي القيمة الحدودية (ق ح 1):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

$$c_6 = 0, \quad \frac{c_2}{c_1} = a^2 \quad \text{أي}$$

فتصبح المعادلة (6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \dots\dots\dots(10.16)$$

وتصبح المعادلة (4)

$$\varphi = -U \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r}\right) + c_5 c_{11} \theta + c_5 c_{12}$$

الثابت $c_5 c_{12}$ اختياري في السريان الكمون ويمكن اعتباره صفر .
ويمكن إحلال الرمز c محل الثابت $c_5 c_{11}$:

$$\varphi = -\left(r + \frac{a^2}{r}\right) U \cos \theta + c \theta \dots\dots\dots(10.17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left[r + \frac{a^2}{r}\right] U \sin \theta + c$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) U \sin \theta + \frac{c}{r} \dots\dots\dots(10.18)$$

لاحظ أن المعادلة (10.18) تحقق القيمة الحدودية (ق ح 3) .

توزيع السرعة

التعبير عن متجه السرعة عند أي نقطة (r, θ) في مجال السريان قرب سطح الاسطوانة هو:

$$\underline{v} = v_r \underline{i}_r + v_\theta \underline{i}_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \underline{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \underline{i}_\theta$$

وبالتعويض لممالات الكُمون من المعادلات (10.16) و (10.18)

$$\underline{v} = - \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) U \cos \theta \right] \underline{i}_r + \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) U \sin \theta + \frac{c}{r} \right] \underline{i}_\theta \dots \dots \dots (10.19)$$

على سطح الاسطوانة $r = a$

$$\underline{v}_a = \left[2 U \sin \theta + \frac{c}{a} \right] \underline{i}_\theta$$

وبذلك تكون سرعة المائع عند سطح الاسطوانة ناتجة عن إسهامين:

(1) مقدار يعتمد على U والزاوية θ .

(2) مقدار ثابت يساوي c/a .

و يمكن تصور الإسهام الأخير بافتراض الآتي:

(أ) تدور الأسطوانة حول محورها بسرعة زاوية ثابتة تنتج عنها سرعة طرفية تساوي c/a متر في الثانية.

(ب) يضيف دوران الاسطوانة حول محورها مقدار ثابت للسرعة يساوي c/a والتي يمكن أن تكتب ωa حيث ω السرعة الزاوية (rad/s) في الاتجاه \underline{i}_θ الموجب. بملاحظة أنه إذا كانت U موجبة في الربع الأول للدائرة حيث ωa سالبة يستدعي ذلك أن تكون $\omega a = -c/a$ لتصبح المعادلة:

$$v_a = [2U \sin \theta - \omega a] \underline{i}_\theta$$

و بتعريف نسبة السرعة الطرفية للأسطوانة كما يلي

$$\lambda = \frac{\omega a}{U} \dots \dots \dots (10.20)$$

نحصل على العلاقة بين سرعة السريان في الطبقة المتاخمة للأسطوانة و الزاوية θ

$$v_a = U [2 \sin \theta - \lambda] \underline{i}_\theta \dots \dots \dots (10.21)$$

يمكن تحديد نقاط الركود على سطح الاسطوانة بتعويض $v_a = 0$ في المعادلة (10.21) لتعطي:

$$\theta_0 = \sin^{-1} \frac{\lambda}{2} \dots \dots \dots (10.22)$$

الشكل (10.8) يوضح مقطع لأسطوانة متعامدة على سريان منتظم سرعته الأساس U في الاتجاه المضاد لاتجاه x الموجب. باعتبار أن السرعة الدورانية للأسطوانة في الاتجاه الموجب فأَن قيمة λ تكون سالبة.

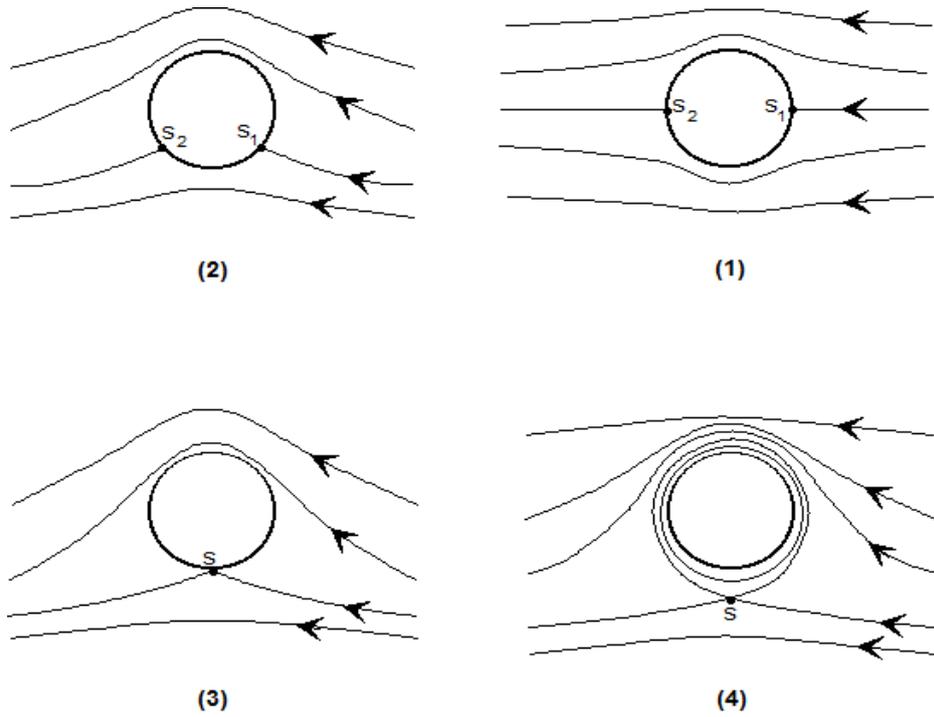
ويمكن استنتاج ما يلي عند وضع قيم مختلفة للسرعة الدورانية :

$$\theta_o = 0, 180^\circ \leftarrow \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\theta_o = 210^\circ, 330^\circ \leftarrow \lambda = -1 \quad (2)$$

$$\theta_o = 270^\circ \leftarrow \lambda = -2 \quad (3)$$

$$\theta_o = 270^\circ \leftarrow \lambda < -2 \quad (4)$$



الشكل 10.8

الضغط على سطح الاسطوانة

باستخدام معادلة برنولي

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(\frac{V}{U} \right)^2 \right]$$

ولإيجاد الضغط على سطح الاسطوانة نعوض للمقدار V^2 من المعادلة (10.21)

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - 4 \sin^2 \theta + 4 \lambda \sin \theta - \lambda^2 \right] \dots (10.23)$$

القوة على سطح الاسطوانة

باعتبار F_x , F_y مركبتي القوة F على سطح الاسطوانة في الاتجاهين x و y

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

$$F_x = \iint_A -p \cos \theta \, dA$$

$$dA = (a \, d\theta) b$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta \, ab \, d\theta$$

وبالتعويض للضغط p من المعادلة (10.23)

$$F_x = -ab \int_0^{2\pi} p_{\infty} \cos \theta \, d\theta - ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \left[\int_0^{2\pi} (\cos \theta - 4 \cos \theta \sin^2 \theta + 4 \lambda \cos \theta \sin \theta - \lambda^2 \cos \theta) \, d\theta \right] = 0$$

وهذا يعني أن لا مركبة للقوة في الاتجاه x .

$$F_y = \iint_A -p \sin \theta \, dA = -ab \int_0^{2\pi} p \sin \theta \, d\theta$$

$$= -ab \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \int_0^{2\pi} (\sin \theta - 4 \sin^3 \theta + 4 \lambda \sin^2 \theta - \lambda^2 \sin \theta) \, d\theta$$

$$= -2 a b \rho U^2 \lambda [\pi] = 2\pi ab \rho U^2 \lambda$$

$$\underline{F} = -2\pi ab \rho U^2 \lambda \underline{j}$$

تعمل هذه القوة في الاتجاه y متعامدة على اتجاه السريان الرئيسي. بتحديد اتجاه الدوران و اتجاه السرعة الأساس و بالتالي اتجاه نسبة السرعة الطرفية يتحدد اتجاه القوة \underline{F} . تعرف هذه القوة بالرفع و تكون قيمتها المطلقة



الشكل 10.9

$$F_L = 2\pi ab \rho U^2 \lambda \dots\dots\dots(10.24)$$

نرى ظاهرة الرفع هذه، على سبيل المثال، حين تُدفع كرة بضرية جانبية بحيث تتخذ سرعة انتقالية U وسرعة زاوية ω تدوير الكرة. ونلاحظ حينئذ أن الكرة تتحرك في مسار منحني مما يدل على نشوء قوة الرفع F_L . وقد طُبِّقت النظرية في سفينة استخدمت أسطوانات عمودية معرّضة للرياح وتدار حول محورها. ويمكن ذلك من الحصول على القوة F_L التي وفرت الدفع للسفينة. نضيف هنا أن الرفع الفعلي أقل مما تتنبأ به المعادلة النظرية (10.24).



الشكل 10.10

يعرف معامل الرفع C_L بالمعادلة :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = 2\pi \lambda \dots\dots\dots(10.25)$$

مثال 10.3

أسطوانة قطرها 0.3m تدور حول محورها بسرعة 60rpm داخل سريان سرعته الرئيسية 4.0m/s وكثافته 1.0kg/m^3 كما في الشكل (10.10). أحسب معامل الرفع و الرفع المثالي على متر واحد من طول الاسطوانة وحدد مواضع الركود.

$$\omega = 2\pi N/60 = 2\pi(60)/60 = 6.3 \text{ rad/s}$$

$$a = 0.15$$

$$\lambda = \omega a/U = -0.24$$

$$C_L = 2\pi(1.5) = \mathbf{1.5}$$

$$A = bd = 1(0.3) = 0.3 \text{ m}^2$$

$$F_L = 1.5(1/2)1.0(4.0)^2 (0.3) = \mathbf{3.6N}$$

$$\theta_0 = \sin^{-1} (\lambda/2) = -6.8^\circ$$

$$\theta_{01} = \mathbf{353.2^\circ}, \theta_{02} = \mathbf{186.8^\circ} .$$

10.4 الرفع على الجنيح



الشكل 10.11

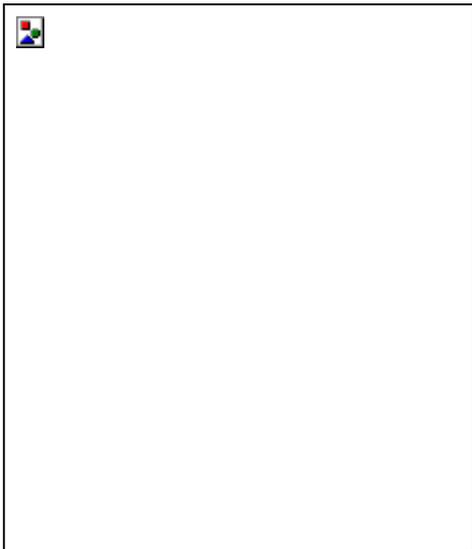
الجنيح شريحة وتريه من الأجسام ذات الخصائص الحركية. أمثلة لهذه الأجسام: جناح الطائرة، ريش الدقّاع و ريش المضخات والعنفات. نحن معنيون هنا باستخلاص قوة الرفع على الجنيح و سنرى أن النظرية التي استخلصت لتقدير الدفع على الأسطوانة تفيد في استخلاص الرفع على الجنيح. بُنيت نظرية الرفع على الاسطوانة على اعتبار السريان لالزجي. إلا أننا أضفنا الافتراض القاضي بانتقال سرعة دوران الاسطوانة إلى طبقة المائع اللصيقة بها. و بدراسة سريان فعلي عبر جنيح بزواية هجوم ثابتة نرى أن قوة الرفع تنشأ دون الحاجة لدوران الجنيح حول محوره كشأن الاسطوانة. إلا أننا ندرك أيضاً أن زاوية الهجوم للجنيح الثابت تتسبب في دوران المائع حول الجنيح دوراناً جزئياً. وهذا يقودُ إلى الاستنتاج المُهم بأن الرفع في كل الأحوال، ملازم لدوران المائع حول الجسم.

التدوير Γ

يوضح الشكل (10.12) خط حلقي طوله l في سريان رتيب. السرعة عند نقطةٍ ما على الخط الحلقي \underline{v} ويعرّف التدوير بالعلاقة:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{l} \dots \dots \dots (10.26)$$

$$F_L = b \rho U \Gamma \dots \dots \dots (10.27)$$



الشكل 10.12

بملاحظة أن التدوير يمكن استخلاصه للأجسام المختلفة بما فيها الجنيحات نرى عمومية المعادلة (10.25) و تُعرّف هذه المعادلة المهمة بقانون **كوتا- يوكوفسكي**.

ندرس الآن السلوك الفعلي للسريان حول جنيح بزواية هجوم صغيرة و موجبة.

في بداية الحركة يكون السريان مثالياً وتكون قيمة التدوير Γ حول الجنيح صفراً.

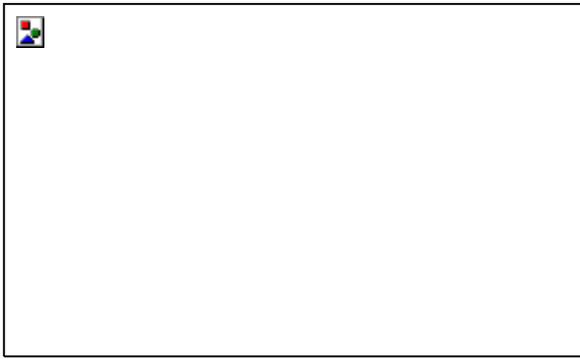
إلا أن هذا الوضع المثالي لا يدوم طويلاً إذ أنه لا يمكن استدامة الانعكاس الحاد في خطوط السريان عند ذيل الجنيح. فتستقيم خطوط السريان مسببةً انفصال الطبقة

الجدارية و ظهور الدوامات في مؤخرة الجنيح التي يجرفها التيار باستمرار إلى سافل المجال. و ينتج عن استقامة هذه الخطوط فقد توازن الجوانب الموجبة والسالبة لتكامل التدوير مما يؤدي إلى أن يصبح التدوير حول الجنيح غير مساوٍ للصفر. ويعني ذلك أن التدوير Γ لا ينتج عن طواف المائع حول الجنيح و إنما عن أن خالص التكامل حول الجنيح لم يعد صفرًا. و تنشأ بذلك قوة رفع على الجنيح يمكن معرفة قيمتها النظرية بتعويض قيمة التدوير في معادلة الرفع (10.27).

نرى أيضاً من التجربة أن الرفع على الجنيح يزيد مع زيادة زاوية الهجوم α في مدى زوايا الهجوم الصغيرة. وبذلك يكون أثر زاوية الهجوم على الجنيح مماثلاً لأثر السرعة الزاوية ω في حالة الاسطوانة التي سبقت دراستها في القسم (10.3).

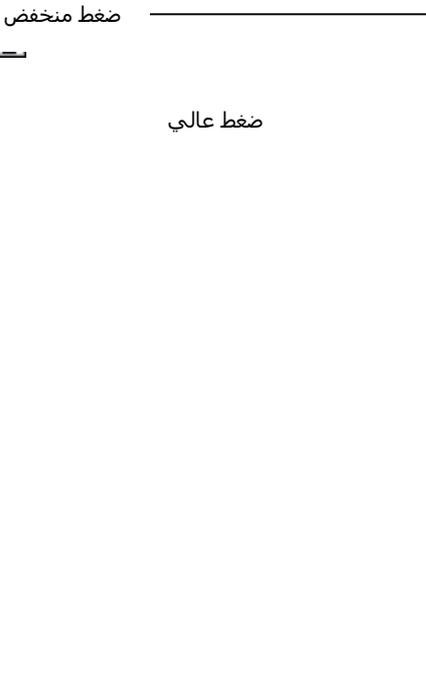
إذا كان الجنيح لوحاً مستويًا و زاوية الهجوم صغيرة يمكن استخلاص العلاقة النظرية:

$$C_L = 2\pi \sin \alpha \dots\dots\dots(10.28)$$



الشكل 10.13

عند زوايا الهجوم العالية الجنيحات يزداد الانفصال وتزداد الدوامات عنفاً وينشأ عن ذلك نقصاناً في معدل زيادة C_L مع α ثم يتبع ذلك نقصاناً في قيمة C_L وزيادة في C_D وتعرف هذه بحالة **الانهيار**. ويوضح الشكل (10.13) العلاقة التجريبية للجنيح NACA4412 عند عددي رينولز $1E6$ و $6E6$.



الشكل 14

الأثر الناشئ عن محدودية الباع

التحليل السابق اعتمد ثنائية أبعاد السريان ويعني أن الجنيح أو الاسطوانة ذوي باع طويل جداً مقارنةً بالوتر. أي أن النسبة الباعية عالية. وتعرف النسبة الباعية كما يلي:

النسبة الباعية

$$AR = \text{باع الجناح} \setminus \text{الوتر} =$$

لحالات النسبة الباعية غير العالية نحتاج لدراسة طبيعة السريان ثلاثي البعد حول الجناح. ضغط المائع تحت الجناح أعلى من ضغطه فوق الجناح، كما هو موضح في الشكل (10.14a). ينشأ عن الفرق في الضغط هروب المائع من أسفل الجناح إلى أعلاه عند طرفي الجناح - الشكل (10.14b).

تؤدي الإضافة المذكورة في الجانب الأعلى إلى محصلة سرعة تتجه جزئياً نحو الخط النصفى للجناح. كما أن نقصان الكتلة في الجانب السفلي يؤدي إلى محصلة



الشكل 10.15

سرعة تتجه جزئياً نحو جانبي الجناح (b,c). نشوء هذه الدوامات - الشكل (10.15) - يعني فقدان في الطاقة ترتب على محدودية الطول في البعد المكاني الثالث ونقصان في الرفع عن قيمته المثالية.

تتبع في الصناعة بعض الطرق العملية للتقليل من أثر محدودية الباع، منها زيادة النسبة الباعية أو وضع حواجز جانبية للحد من هروب المائع إلى أعلى الجناح. لحساب الرفع الحقيقي على الجناح يضرب الرفع المثالي المحسوب في نسبة تحدد تجريبياً على نوع الجنيح المستخدم.

مثال 10.4

طائرة تزن 20kN . المساحة المؤثرة للجناح 30m² . سرعة التحليق 70m/s في هواء كثافته 1.16kg/m³ . خصائص قطاع الجناح موضحة في الشكل (10.16). قدر زاوية الهجوم والقدرة المطلوبة لمقاومة الإعاقة على الأجنحة. تجاهل أثر الهروب الطرفي.

للتوازن عند التحليق : الرفع = الوزن

$$Wt = \frac{1}{2} \rho U^2 A C_L$$
$$C_L = \frac{Wt}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \frac{20E3}{\frac{1}{2} (1.16)(70)^2 30} = 0.23$$

من منحنى الرفع - الشكل

(10.17) - عند $C_L = 0.23$ ،

$$\alpha \approx 2^\circ$$

القدرة اللازمة لمواجهة

الإعاقة

$$P = DU = \frac{1}{2} \rho A U^3 C_D$$

من منحنى الجنيح عند

$$C_D = 0.006 , \alpha = 2^\circ$$

$$P =$$

$$\frac{1}{2} (1.16)(70)^3 (30)(0.006)$$

$$= 35.8 \text{ kW}$$



الشكل 10.16

مسائل

10.1 يتصف سريان بدالة الكُمون: $\varphi = y^3 - 3x^2 y$

(أ) أستخلص مركبات السرعة.

(ب) استخلص دالة السريان.

(ج) أرسم بعض خطوط السريان في المستوى x-y لقيم x الموجبة.

$$[u=6xy, v=3y^2-3x^2, \psi=x^3-3xy^2]$$

10.2 بدءاً من المعادلة (10.19) لمتجه السرعة للسريان قرب اسطوانة ثنائية البعد في مجال

$$[\psi = -(r - \frac{a^2}{r})U \sin\theta - a^2 \omega \ln r]$$

10.3 الخصائص الأسس لسريان هواء: الضغط 0.1 MPa ، درجة الحرارة 300 K و السرعة 50i-

m/s . يمر السريان بأسطوانة طويلة الباع قطرها 0.5m تدور حول محورها عكس عقارب الساعة

بمعدل 5. rps . مستخدماً نظرية السريان المثالي أحسب :

(أ) نسبة السرعة الطرفية.

(ب) المواقع الزاوية للركود .

(ج) الضغط عند مواقع الركود .

(د) السرعة والضغط قرب سطح الاسطوانة عند الزوايا : 90° , 270°

(هـ) الرفع على وحدة طول .

$$[-0.16, 185^\circ, 355^\circ; 0.10145\text{MPa}; -108\text{m/s}, 0.0947\text{MPa}; 92\text{m/s}, 0.0965\text{MPa}; 363\text{N}]$$

10.4 يمكن اعتبار جناح طائرة لوح مستوي طول وتره 1.5m و يتحرك في هواء كثافته 1.2kg/m³

ولزوجته الكينماتية 6E-5 m²/s بزواية هجوم 10° . عدد رينولز للطيران 3E6 مبنياً على وتر الجناح .

بافتراض أن السريان ثنائي البعد أحسب :

(أ) قوة الرفع على كل متر من الباع .

(ب) باع الجناح إذا كان الوزن الكلي 0.1 MN . [14.1 kN; 7.1m]

10.5 دلت اختبارات أجريت على جناح طائرة أنه يمكن تقريب تغير معاملي الرفع والإعاقة مع زاوية

الهجوم α في مدى زاوية الهجوم 0° - 12° كما يلي :

$$C_L = 0.35(1+0.2\alpha), C_D = 0.01(1+\alpha)$$

وزن الطائرة 0.15 MN ومساحة الجناح 35m² . زاوية الهجوم عند التحليق الثابت 3° . أحسب سرعة

الطائرة والقدرة اللازمة لمجاهاة الإعاقاة على الجناح. أعتبر كثافة الهواء 1.0kg/m³ [124m/s; 1.33MW]

10.6 قارب سريع مزود بجنيح مائي مساحته المؤثرة 0.5m² . معاملي الرفع والإعاقة للجنيح 1.2 و

0.02 ، على التوالي . وزن القارب 20kN وكثافة الماء 1000kg/m³ .

متجاهلاً مقاومة الهواء أحسب :

(أ) أقل سرعة ممكنة للقارب يحمل فيها الجنيح وزن القارب كليةً .

(ب) القدرة اللازمة لمواجهة الإعاقاة عند السرعة المحسوبة أعلاه .

(ج) أعلى سرعة للقارب إذا كانت القدرة العليا 20kW .

$$[8.2\text{m/s}; 2.7\text{kW}; 15.9\text{m/s}]$$

11 السريان الإنضغاطي للغاز

11.1 مقدمة

يُعنى هذا الباب بعرض الأساليب الرياضية الخاصة بالسريان لأنضغاطي للغازات للتطبيقات التي يمكن فيها اعتبار السريان أحادي البعد و رتيب. و تتعدد التطبيقات الهندسية التي يمكن فيها قبول هذه الافتراضات و تشمل التصاميم الأولية لمنافذ المحركات الدافعة و شبكات الغاز المضغوط. يتعرض هذا الباب للتطبيقات المذكورة خلال أربعة أقسام تغطي حركة السريان الإنضغاطي اللاتبيدي و السريان عبر الصدمة المتعامدة و السريان الاحتكاكي في الأنابيب ثم السريان المصاحب للنقل الحراري. و يختم الباب بدراسة كيفية قياس الضغط و السرعة للسريان لأنضغاطي.

11.1.1 معادلات الحفظ

يوصف السريان بأنه إنضغاطي إذا تغيرت الكثافة بقدْرٍ مؤثر عند تغير العوامل الأخرى ، مثل الضغط و درجة الحرارة. السمة المهمة للسريان الإنضغاطي - عند المقارنة مع السريان اللانضغاطي - أن التغير في درجة الحرارة يغير بصورة فعالة في متغيرات السريان. و لوضع معادلات الحفظ المناسبة للتحليل يمكن البدء من الصور العامة لهذه المعادلات كما عرضت في الباب الثاني من هذا الكتاب. السريان الرتيب أحادي البعد بدون بذل طاقة من مصدر خارجي و بتجاهل التغيرات في الطاقة الوضعية - نألتها بالنسبة للغازات - تأخذ معادلة الطاقة الصورة:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}$$

حيث v السرعة المتوسطة في المقطع

p الضغط المتوسط في المقطع

\dot{Q} معدل إضافة الحرارة

\dot{m} معدل السريان الكتلي للغاز

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \dots\dots\dots(11.1.1)$$

حيث h المحتوى الحراري.

معادلة الإضطراب لهذه الحالة:

$$\Delta(pA) + \Delta(\dot{m}v) + \tau_w A_w = 0 \dots\dots\dots(11.1.2)$$

حيث τ_w هو إجهاد القص على الجدار الحاوي للسريان و A_w مساحة سطح التماس بين المائع و الجدار.

11.1.2 بعض معادلات الديناميكا الحرارية ذات الصلة

معادلة الغاز الكامل

$$p = R\rho T \dots\dots\dots(11.1.3)$$

R : ثابت الغاز ووحدته J/(kg.K)

$$R = \frac{\bar{R}}{M_r} = \text{ثابت الغاز الكوني\الكتلة النسبية}$$

$$= 8310 \text{ J/(kg.K)} \bar{R}$$

بالنسبة للهواء:

$$M_r \sim 29 \rightarrow R = 287 \text{ J/(kg.K)}$$

باعتبار c_v الحرارة النوعية عند ثبات الحجم

c_p الحرارة النوعية عند ثبات الضغط

k نسبة الحرارة النوعية

$$k = \frac{c_p}{c_v} \dots\dots\dots(11.1.4)$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \dots\dots\dots(11.1.5)$$

$$c_p = c_v + R = \frac{kR}{k-1} \dots\dots\dots(11.1.6)$$

تظهر كل من c_p و c_v في تعبيرات الطاقة الداخلية و المحتوى الحراري:

$$u = c_v T \dots\dots\dots(11.1.7)$$

$$h = c_p T \dots\dots\dots(11.1.8)$$

للسريان اللاتبيدي

$$p = \text{const} \cdot \rho^k \dots\dots\dots(11.1.9)$$

العلاقة التفاضلية بين المحتوى الحراري و التبيد

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \dots\dots\dots(11.1.10)$$

الزيادة في التبيد بين الموضعين (1) و (2) لغاز مثالي:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \dots\dots\dots(11.1.11)$$

11.1.3 المقادير اللابعديّة ذات الصلة

1 عدد ماخ M

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث v و c سرعة الغاز و سرعة الصوت في موضع واحد.

2 نسبة الحرارة النوعية k

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

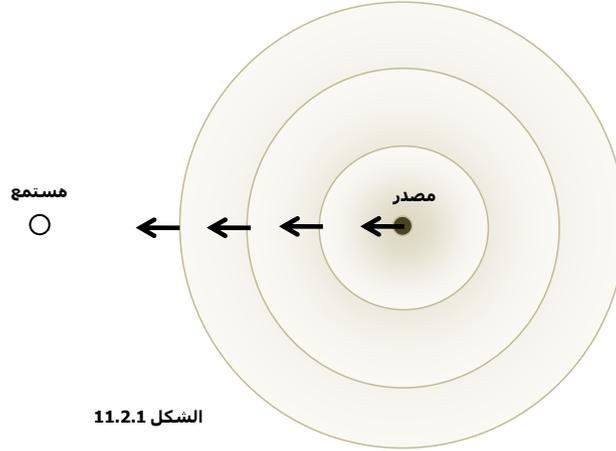
3 عدد رينولز Re

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}$$

حيث l إزاحة مرجعية في السريان
 μ اللزوجة الحركية للمائع
 ν اللزوجة الكينماتية للمائع.

11.2 حركة الموجات الصوتية

11.2.1 العلاقة بين الصوت ومصدره و وسط انتقاله

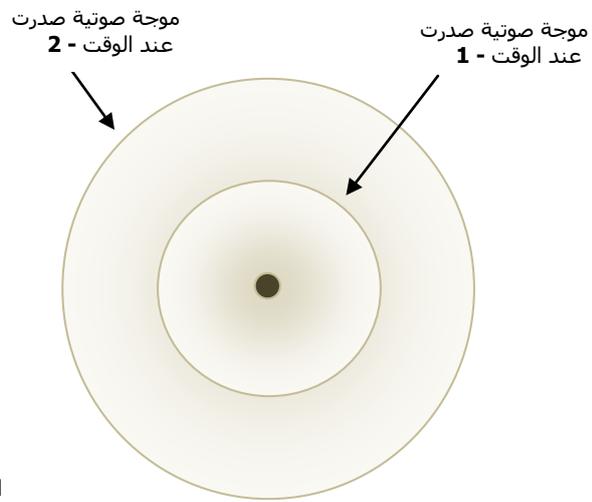


الشكل 11.2.1

ينتقل الصوت بواسطة موجات ضغطية. و بذلك فهو يحتاج لوسط ناقل. و تعتمد سرعة الصوت على انضغاطية الوسط الناقل.

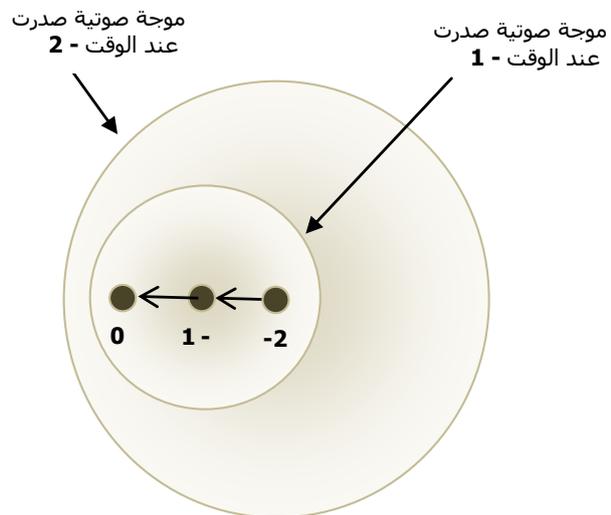
لنتأمل موجتين صوتيتين يبدأان حركتهما من مصدر واحد. بُعثت الموجة الأولى قبل وحدتين زمنييتين من الآن - أي عند الوقت (1-). تكون هذه الموجات في شكل كرات تزداد أقطارها بسرعة الصوت. الشكل (11.2.1) يوضح مقاطع من هذه الكرات كما تُشاهد الآن (t=0).

الحالة I : مصدر الصوت ساكن $\left\{ \frac{v}{c} = 0 \right\}$



الشكل 11.2.2a

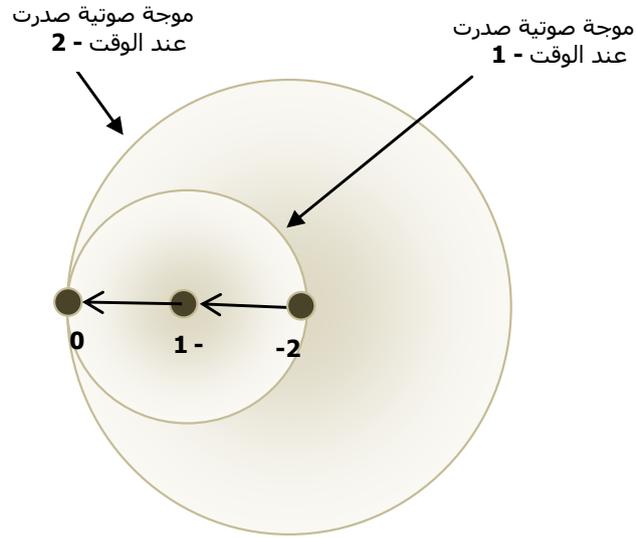
الحالة II : مصدر الصوت يتحرك بسرعة أقل من سرعة الصوت $\left\{ \frac{v}{c} < 1 \right\}$ (الحالة دون الصوتية)



الشكل 11.2.2b

الحالة III : مصدر الصوت يتحرك بسرعة تساوي سرعة الصوت $\left\{ \frac{v}{c} = 1 \right\}$

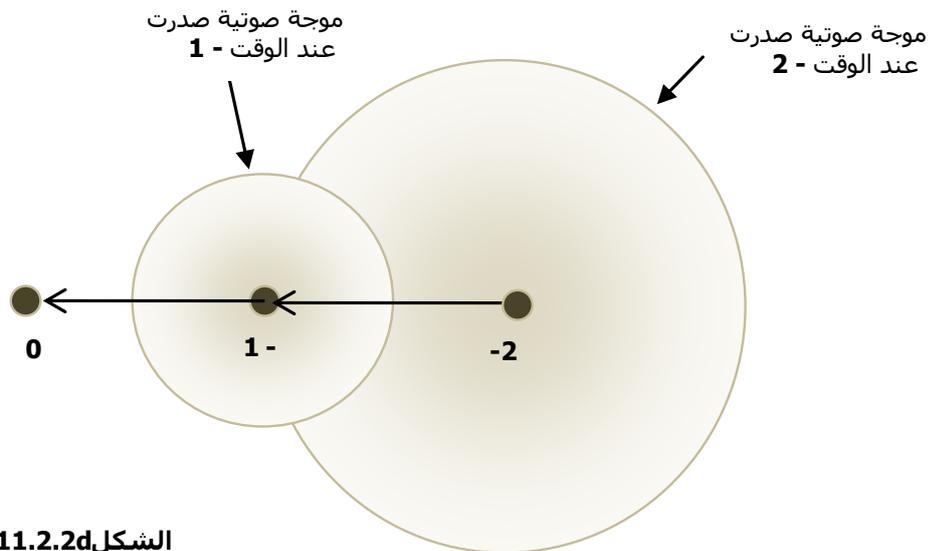
(الحالة الصوتية)



الشكل 11.2.2c

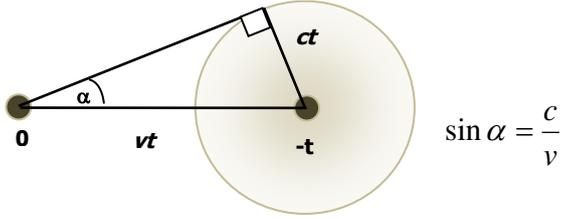
الحالة IV : مصدر الصوت يتحرك بسرعة تفوق سرعة الصوت $\left\{ \frac{v}{c} > 1 \right\}$

(الحالة فوق الصوتية)



الشكل 11.2.2d

11.2.2 مخروط ماخ



$\alpha =$ زاوية ماخ

الشكل 11.2.3

$$\dots\dots\dots(11.2.1) \quad \alpha = \sin^{-1} \frac{c}{v} = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

و هذا يعنى أنه إذا كان عدد ماخ ثابتاً فان زاوية مخروط ماخ تظل ثابتة.

مثال 11.2.1

طائرتان مقاتلتان تطيران في اتجاه واحد على مستوى عمودي واحد و بنفس عدد ماخ. المطلوب حساب أكبر مسافة أفقية ممكنة بين الطائرتين بحيث لا تكون أي منهما في مجال صوت الأخرى. في أي مدى لعدد ماخ يكون ذلك ذا معنى؟



الشكل 11.2.4

$$\tan \alpha = \frac{H}{x}$$

$$x = H\sqrt{M^2 - 1}$$

$$\rightarrow M > 1$$

11.2.3 سرعة الصوت



الشكل 11.2.5

الأنبوب الموضح في الشكل (11.2.5) يحوي غاز ساكن منتظم الضغط p . يحد الأنبوب عند جانبه الأيسر مكبس. يُحرّك المكبس فجأةً إلى اليسار (حركة تفرغ) ينتج عنها هبوط في الضغط بمقدار ضئيل dp . ينتشر هذا الهبوط بسرعة c ليعم كل الأنبوب. مخطط الضغط-المسافة في الشكل (11.2.5) يبين توزيع الضغط في الأوقات 0 و t و $2t$.

لاستخلاص علاقة سرعة الصوت بانضغاطية السريان ندرس قوانين الحفظ مطبقة على حجم تحكم يحوي موجة صوتية - الشكل (11.2.6).



الشكل 11.2.6

باتخاذ الموجة منطاً يمكن اعتبار الغاز يتحرك بسرعة c في اتجاه x السالب.

حفظ الكتلة يُعطي

(الكثافة)(المساحة)(السرعة) = ثابت

$$(\rho-d\rho)(c-dv)A = \rho cA$$

$$\rho dv + c d\rho = 0 \dots\dots\dots(11.2.2)$$

حفظ الإضطراد:

$$\Delta(pA) + \Delta(mv) + \tau_w A_w = 0 \dots\dots\dots(11.1.2)$$

نسبةً لضالة سُمك الموجة

$$\tau_w A_w = 0$$

$$\Delta(pA) = -Adp$$

$$\Delta(mv) = m \Delta v = \rho cA(-dv) = -A\rho c dv$$

$$dp + \rho c dv = 0 \dots\dots\dots(11.2.3)$$

تعطيان (11.2.3) و (11.2.2)

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \dots\dots\dots(11.2.4)$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2} \dots\dots\dots(11.2.5)$$

المعادلة (11.2.6) تعبر عن معدل تغير الكثافة مع الضغط و بذلك تكون مؤشراً للانضغاطية. و نلاحظ اعتماد ذلك كلياً على سرعة الموجة الضغطية c ، و هي سرعة الصوت .

للسريان اللاتبيدي - المعادلة (11.1.9)

$$= \text{const} \frac{p}{\rho^k}$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{d(\rho^k)}{\rho^k} = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k \frac{\rho^{k-1} d\rho}{\rho^k} = 0$$

$$\frac{dp}{p} - k \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} \dots\dots\dots(1)$$

معادلة الغاز الكامل:

$$p = R\rho T$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \dots\dots\dots(2)$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dp}{d\rho} = kRT \dots\dots\dots(3)$$

(3) و (11.2.5) تعطيان

$$c^2 = kRT$$

$$c = \sqrt{kRT} \dots\dots\dots(11.2.6)$$

11.3 السريان اللاتبيدي

11.3.1 مقدمة

ينبغي التحليل في هذا الفصل على الافتراضات :

- (أ) سريان رتيب
- (ب) أحادي البعد
- (ج) الآثار اللزجية وانتقال الحرارة وأثر الجاذبية ضئيلة التأثير ويمكن تجاهلها .
- (د) الغاز مثالي .

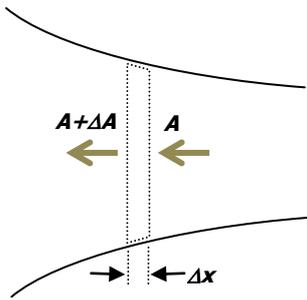
الافتراضات المذكورة تبسط التحليل كثيراً إلا انه يظل مناسباً للتطبيق على الكثير من العمليات الهندسية بدقة كافية. أمثلة لهذه العمليات : السريان في منافث ومبطنات العنفة الغازية و العنفة البخارية و المنافث الصاروخية .

ينبغي مراعاة الجوانب العملية الآتية لتصح الافتراضات أعلاه :

- (أ) معدل تغير المساحة مع المسافة يؤثر في الطبقة الجدارية ويجب أن يكون صغيراً .
- (ب) إذا كان الخط المحوري للمجرى منحنياً يجب أن يكون نصف قطر الانحناء كبيراً مقارنة مع قطر المجرى .

11.3.2 المعادلات التفاضلية

بدءً من قوانين الحفظ (كتلة و طاقة) مطبقة على حجم تحكم تفاضلي لمجرى متغير المساحة في اتجاه السريان، نحصل على العلاقات التفاضلية للسريان اللاتبيدي و التي تعرف أيضاً بالعلاقات الوصفية للسريان اللاتبيدي - الشكل (11.3.1).



الشكل 11.3.1

قانونا حفظ الكتلة والطاقة :

$$\rho v A = const$$

$$h + \frac{v^2}{2} = const$$

وفي صورتيهما التفاضليتين:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \dots\dots(1)$$

$$dh + v dv = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \dots\dots\dots(3)$$

وبما أن السريان لاتبيدي

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

وتصبح المعادلة (2)

$$+ vdv = 0 \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{dp}{\rho v^2} + \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

(1) و (4) تعطيان

$$\frac{dp}{\rho v^2} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{d\rho}{dp} - \frac{dA}{dp A} = 0$$

وباستخدام المعادلة (11.2.5)

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} - \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} = 0$$

$$\frac{1}{M^2} - 1 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho}{A} c^2 = \frac{dA}{dp} \frac{\rho kRT}{A} = \frac{dA}{dp} k \frac{p}{A}$$

$$\frac{dp}{dA} = k \frac{p}{A} \frac{M^2}{1-M^2} \dots\dots\dots(11.3.1)$$

$$\frac{dv}{dA} = \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dA}$$

(11.2.6) و (4) و (11.3.1) يعطين

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A} \frac{1}{1-M^2} \dots\dots\dots(11.3.2)$$

- المعادلة (11.3.2) تدل على أن عدد ماخ **حرج** عند $M = 1$.
- في حال $M < 1$ فإن السرعة تقل مع زيادة المساحة في اتجاه السريان وتزيد بنقصان المساحة، تماماً كما هو الحال بالنسبة للسريان اللانضغاطي حيث

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A}$$

- وفي حال $M > 1$ تنعكس العلاقة، حيث تزيد السرعة وتنقص تبعاً لزيادة المساحة أو نقصانها
- المعادلة (11.3.1) تدل على أن عدد ماخ **حرج** أيضاً عند $M = 1$ والعلاقة بين الضغط والمساحة دوماً على عكس العلاقة بين السرعة والمساحة.

11.3.3 المعادلات التكاملية

عند استخلاص المعادلات التكاملية للسريان اللاتبيدي في صورة لابعدية نحتاج لتحديد نقاط مرجعية للمتغيرات و ستكون كما يلي :

- النقطة المرجعية الأولى هي الحالة الركودية ($v=0$) و سيشمل ذلك المتغيرات: T, p, ρ و تكون قيمها المرجعية : T_0, p_0, ρ_0 على التوالي.
- النقطة المرجعية الثانية هي الحالة الصوتية ($v = c$) . و سيقصر استخدامها هنا على المساحة A . و تكون قيمتها المرجعية A^* .

بتطبيق معادلة الطاقة (11.1.1) بين نقطة عامة و النقطة المرجعية (الركودية) :

$$h + \frac{1}{2} v^2 = h_0$$

$$v^2 = 2(h_0 - h)$$

و بالاستفادة من المعادلات (11.1.8) و (11.1.4)

$$v^2 = 2c_p (T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1} (T_0 - T) = \frac{2kR}{k-1} T \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right)$$

$$M^2 = \frac{2}{k-1} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \right]^{-1} \dots \dots \dots (11.3.3)$$

و بتعريف μ

$$\mu = 1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2$$

$$\frac{T}{T_0} = \mu^{-1} \dots \dots \dots (11.3.3)$$

للسريان اللاتبيدي و من المعادلتين (11.1.5) و (11.1.9)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

و بالتعويض في المعادلة (11.3.5)

$$\frac{p}{p_0} = \mu^{-\frac{k}{k-1}} \dots \dots \dots (11.3.4)$$

و بالاستفادة من المعادلة (11.1.9)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}$$

و بالتعويض من (11.3.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \mu^{-\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots(11.3.5)$$

لاستخلاص العلاقة التكاملية للمساحة نبدأ من معادلة حفظ الكتلة:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v}$$

حيث الموضع (1) موضع محدد في السريان.

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 M_1 c_1}{\rho M c} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{kRT_1}}{\rho M \sqrt{kRT}} = \frac{\rho_1 M_1 \sqrt{T_1}}{\rho M \sqrt{T}} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\rho_1/\rho_0}{\rho/\rho_0} \right) \sqrt{\left(\frac{T_1/T_0}{T/T_0} \right)}$$

و بالتعويض من المعادلات (11.3.3) و (11.3.5)

$$\frac{A}{A_1} = \frac{M_1}{M} \left(\frac{\mu}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

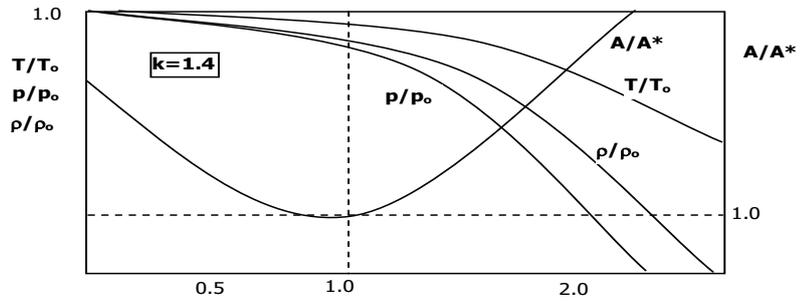
و إذا اعتبرنا المقطع (1) هو المقطع الصوتي حيث

$$M = 1.0, A_1 = A^*$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}(k-1)(1) = \frac{1}{2}(k+1)$$

و تصبح المعادلة

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.3.6)$$



الشكل 11.3.2

الشكل (11.3.2) يبين منحنيات التغير الممثلة للمعادلات التكاملية المستخلصة. و يجد القارئ في الملحق (هـ) قوائم مستخلصة من المعادلات المذكورة للسريان اللاتبيدي عند $k = 1.4$.

مثال 11.3.1

يسري غاز في مجرى متغير المساحة. نسبة الحرارة النوعية للغاز 1.25 . درجة الحرارة عند موضع ما 30°C و درجة الحرارة الركودية 180°C . لوحظ أن الضغط عند هذا الموضع يتناقص في اتجاه السريان.

(أ) أحسب عدد ماخ

(ب) وضح ما إذا كان المجرى لاماً أم ناشراً

(ج) وضح ما إذا كانت السرعة تزيد أو تنقص عند هذا الموضع.

$$T = 30 + 273 = 303K \quad (I)$$

$$T_0 = 180 + 273 = 453K$$

$$\rightarrow \mu = 1.50$$

المعادلة (11.3.3) تعطي

$$1.5 = 1 + 0.125 M^2$$

$$M = 2.0$$

(ب) المعادلة (11.3.1):

$$\frac{dp}{dA} = k \frac{p}{A} \frac{M^2}{1-M^2}$$

$M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن سالب. و لأن dp سالبة فإن dA تكون موجبة و يعني ذلك أن

المجرى ناشر.

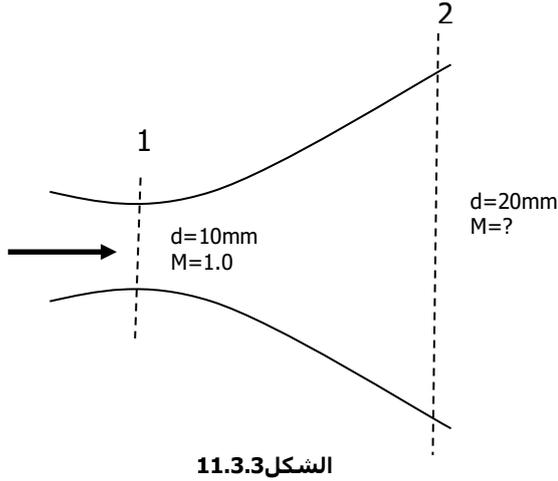
(ج) المعادلة (11.3.2):

$$\frac{dv}{dA} = -\frac{v}{A} \frac{1}{1-M^2}$$

$M > 1$ تعني أن الجانب الأيمن موجب و لأن dA موجبة فإن dv تكون موجبة و يعني ذلك أن

السرعة تتزايد.

مثال 11.3.2



قيمة النسبة k للسريان في المجرى الموضح في الشكل (11.3.3) تساوي 1.25 . المجرى ناشر و قيمة M عند المقطع (1) تساوي 1.0 و $dM/dx > 0$. قطر المجرى يزيد من المقطع (1) إلى 20mm عند المقطع (2). المطلوب قيمة عدد ماخ عند المقطع (2).

$$= 4 \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{1}{M_2} \left(\frac{2\mu_2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$4 = \frac{1}{M_2} \{ 0.889 [1 + 0.125 M_2^2] \}^{4.5}$$

المعادلة أعلاه تتطلب طريقة تكريره للحل.

باستخدام طريقة نيوتن رافسون - الملحق (ب):

$$F = 0.147 [1 + 0.125 M_2^2]^{4.5} - M$$

$$F' = 0.166 M_2 [1 + 0.125 M_2^2]^{3.5} - 1.0$$

$$M_{i+1} = M_i - F/F'$$

نعرف وجود حلين للمعادلة: فوق صوتي و دون صوتي:

$$M_2 = 3.00, 2.77, 2.70, \mathbf{2.70} \quad \text{الحل فوق الصوتي:}$$

$$M_2 = 0.40, 0.14, 0.15, \mathbf{0.15} \quad \text{الحل دون الصوتي:}$$

اعتماداً على طبيعة السريان عند المقطع 1 حيث $dM/dx > 0$ نستنتج أن $M_2 = 2.70$

مثال 11.3.3

لسريان الهواء الموضح في الشكل (11.3.4) المطلوب إيجاد

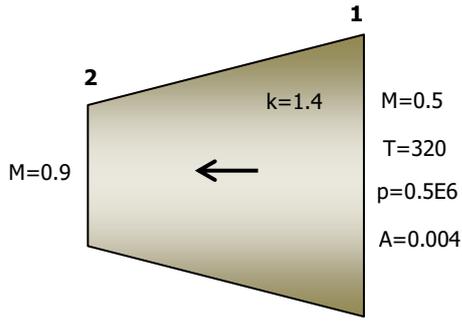
باستخدام A_2, p_2, T_2 :

(أ) معادلات السريان اللاتبيدي

(ب) قوائم السريان الإنضغاطي.

للـهـواء:

$$k = 1.4, R = 287 \text{ J/kg-K}$$



الشكل 11.3.4

(أ) باستخدام المعادلات:

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-1} T_1$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2 = 1.050$$

$$\mu_2 = 1.162$$

$$T_2 = (1.162/1.05)^{-1} (320) = \mathbf{289K}$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-\frac{k}{k-1}} p_1 = \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^{-\frac{1.4}{0.4}} (0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} A_1 = \frac{0.5}{0.9} \left(\frac{1.162}{1.05} \right)^3 A_1 = \mathbf{0.003m^2}$$

(ب) باستخدام قوائم الغاز للسريان الإنضغاطي اللاتبيدي:

M	T/T ₀	p/p ₀	A/A*	
0.5	0.9524	0.8430	1.3398	س ل ت 1:
0.9	0.8606	0.5913	1.0089	س ل ت 2:

$$T_2 = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} T_1 = \left(\frac{0.8606}{0.9524} \right) (320) = \mathbf{289K}$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_0} \frac{p_0}{p_1} p_1 = \left(\frac{0.5913}{0.8430} \right) (0.5E6) = \mathbf{0.35MPa}$$

$$A_2 = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} A_1 = \frac{1.0089}{1.3398} (0.004) = \mathbf{0.003m^2}$$

11.3.3 أثر عدد ماخ على الكثافة

المعادلة (11.3.5) للسريان الإنضغاطي:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]^{-\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots(1)$$

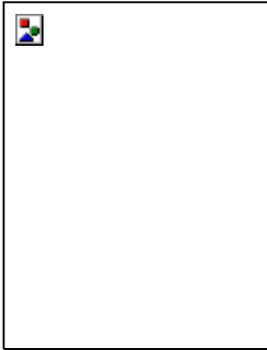
و للسريان اللانضغاطي: ثابت $\rho = \rho_0 =$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 \dots\dots\dots(2)$$

و باعتبار $k = 1.4$ القائمة أدناه تبين الخطأ الناتج عن افتراض اللانضغاطية عند أعداد ماخ مختلفة.

M	0.2	0.4	0.5	1.0
ρ_0/ρ	1.02	1.08	1.13	1.58
$\epsilon \%$	2	7	12	37

11.3.4 معدل سريان الكتلة عبر منفث



الشكل (11.3.6) يوضح منفث موصل إلى مستودع غاز بالمواصفات الآتية:

- p_0 الضغط في مستودع الإمداد
- T_0 درجة الحرارة في المستودع
- A مساحة مقطع المنفث عند موضع الرصد
- M عدد ماخ عند موضع الرصد

الشكل 11.3.6

معادلة حفظ الكتلة:

$$\dot{m} = \rho v A = \left(\frac{p}{RT} \right) (M \sqrt{kRT}) A = \sqrt{\frac{k}{RT}} A M p \dots\dots(11.3.7)$$

باستخدام المعادلات (11.3.3) و (11.3.4) للمتغيرات T و p

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A M p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{\mu^{-\frac{k}{k-1}}}{\mu^{-\frac{1}{2}}}$$

$$m = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\mu^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \dots\dots\dots(11.3.8)$$

يمكن استخلاص المعدل الأعلى للسريان بإجراء التفاضل $\frac{d m}{d M}$ على المعادلة (11.3.8) و مساواته بالصفر. النتيجة أن أعلى معدل سريان يحدث عند $M = 1$ ، و أعلى معدل ممكن للسريان هو

$$m_M = \sqrt{\frac{k}{R}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{A^* p_0}{\sqrt{T_0}} \dots\dots\dots(11.3.9)$$

حيث A^* المساحة الحرجة، أي عند $M = 1$.
و في نفس الموضع

$$\frac{p^*}{p_0} = \frac{p}{p_0} = \text{النسبة الحرجة للضغط.}$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{T}{T_0} = \text{النسبة الحرجة لدرجة الحرارة.}$$

و بتعويض $M=1$ في المعادلات (11.3.4) و (11.3.3):

$$\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{p^*}{p_0} \quad (\text{للـهواء } = 0.528)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (\text{للـهواء } = 0.833)$$

و تعطى المعادلة (11.3.9) الصيغة أدناه عند $k = 1.4$:

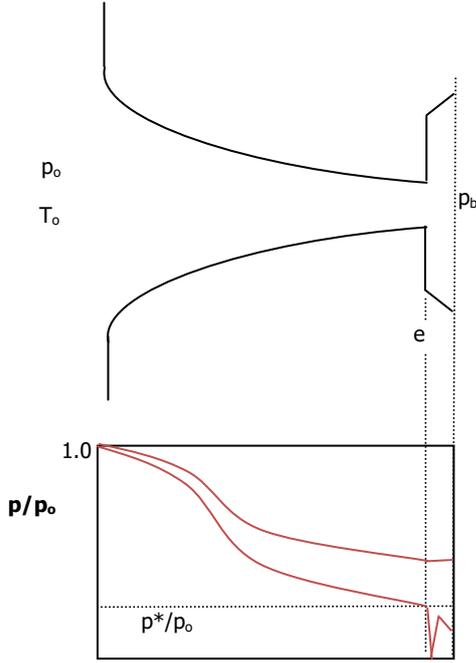
$$m_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}} \dots\dots\dots(11.3.10)$$

المعادلات أعلاه استخلصت للسريان اللاتبيدي. نسبةً لوجود قدر من الاحتكاك في الواقع فان معدل السريان الفعلي يقل عن المقدار المعبر عنه أعلاه. و بذلك يمكن تعريف معامل السريان C_m ليربط السريان الفعلي بالسريان اللاتبيدي:

$$C_m = \text{معدل سريان الكتلة الفعلي} \setminus \text{معدل سريان الكتلة اللاتبيدي}$$

و للمنافث المستقيمة جيدة التصنيع فان قيمة C_m تكون في المدى 0.94 – 0.99 .

11.3.5 توزيع الضغط في المنفت اللام



الشكل 11.3.7

ندرس هنا توزيع الضغط في المنفت اللام من خلال تجربة يتم فيها تثبيت الضغط ودرجة الحرارة في مستودع الإمداد و يعدل الضغط في المستودع المستقبل و يُتبع ما يحدث للضغط في محور المنفت - الشكل (11.3.7).

(أ) الضغط النهائي p_b يساوي الضغط الركودي p_0 ،
 $p_b/p_0 = 1.0$

ممال الضغط في المنفت = صفر و بذلك لا يوجد سريان.

(ب) الضغط النهائي p_b يقل عن الضغط الركودي p_0 . يُحدث هذا ممال ضغط في المنفت و يؤدي إلى سريان في اتجاه x الموجب.

الضغط الخرجي = الضغط النهائي،

$$p_e = p_b$$

و كلما خُفض الضغط p_b ينخفض الضغط الخرجي p_e لنفس المستوى و تزيد السرعة M_e .

(ج) الحالة الحدودية:

بالاستمرار في خفض p_b تبلغ p^* و تصبح $p_e = p^*$ و يصبح عدد ماخ $M_e = 1.0$ و يأخذ معدل

سريان الكتلة أعلى قيمة له، m_M .

(د) حالة الشرّق:

بخفض p_b أدنى من p^* لا تستجيب p_e و تظل

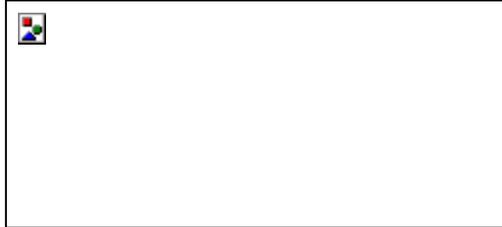
عند المستوى p^* و تظل M_e عند 1.0 و \dot{m} عند

\dot{m}_M و عندها يوصف السريان بأنه شرّق.

ينخفض الضغط سافل المنفت بصورة شبه

فجائية إلى p_b عبر موجات تمديدية - الشكل

(11.3.8).



الشكل 11.3.8

11.3.4 مثال

منفت لام موصل بمستودع إمداد به هواء عند ضغط ركودي ثابت و درجة حرارة ركودية 25°C . الضغط النهائي ثابت عند 0.1MPa و مساحة المنفت الخرجية 0.0005 m^2 .

المطلوب حساب معدل سريان الكتلة للحالتين:

(أ) الضغط في مستودع الإمداد 0.15MPa

(ب) الضغط في مستودع الإمداد 0.35MPa

$$= \rho_e v_e A_e = \sqrt{\frac{k}{RT_e}} A_e M_e p_e \dot{m}$$

$$p_0 = 0.15 \text{MPa} \quad (\text{أ})$$

نبدأ بتحديد ما إذا كان السريان شرفاً

$$p_b = 0.1E6$$

$$p_b / p_0 = 0.667 > p^* / p_0 \quad (0.528)$$

إذن السريان غير شرف

$$p_e = p_b = 0.1E6$$

$$p_e / p_0 = 0.667$$

$$= \mu^{-3.5} = 0.667 \frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\mu_e = 1.123 = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.78$$

$$T_e = T_0 (T_e / T_0) = T_0 (\mu_e^{-1}) = (25+273)(1/1.123) = \mathbf{265K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(265)}} (0.0005)(0.78)(0.1E6) = \mathbf{0.17 \text{ kg/s}}$$

$$p_0 = 0.35 \text{MPa} \quad (\text{ب})$$

$$p_b / p_0 = 0.286 < p^* / p_0$$

إذن السريان شرف

$$p_e / p_0 = p^* / p_0 = 0.528$$

$$p_e = (0.528)(0.35E6) = 0.185E6$$

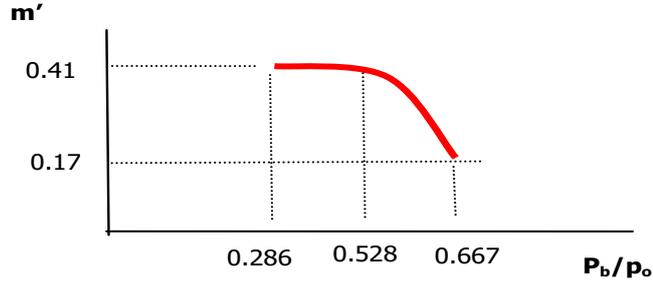
$$T_e / T_0 = T^* / T_0 = 0.833$$

$$T_e = (0.833)298 = \mathbf{248K}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(248)}} (0.0005)(1.0)(0.185E6) = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$

و بأسلوب آخر يمكن استخدام المعادلة (11.3.9)

$$\dot{m}_M = 0.04 \frac{(0.0005)(0.35E6)}{\sqrt{298}} = \mathbf{0.41 \text{ kg/s}}$$



الشكل 11.3.9

مثال 11.3.5

منفذ لام موصل بمروحة ساحبة للهواء. مدخل المنفذ مفتوح إلى الجو بضغط 0.1MPa و درجة حرارة ركودية 303K . المساحة الخرجية للمنفذ 0.0001m^2 . الضغط النهائي في مخرج المنفذ يساوي:

(أ) 0.08MPa

(ب) 0.05MPa

المطلوب تقدير معدل سريان الكتلة و معدل السريان الحجمي.

(أ) $p_b = 0.08\text{MPa}$

$$= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A M_D}{\sqrt{T}} \dot{m}$$

$$p_b / p_0 = 0.08 / 0.1 = 0.8 > 0.528$$

إذن السريان غير شَرِق

$$p_e = p_b$$

$$p_e / p_0 = 0.8$$

$$\frac{P_e}{P_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$0.8 = \mu^{-3.5}$$

$$\rightarrow \mu_e = 1.066$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2$$

$$\rightarrow M_e = 0.57$$

$$T_e / T_0 = \mu_e^{-1} = 0.938$$

$$\rightarrow T_e = (0.938)(303) = 284\text{K}$$

$$= \mathbf{0.0189 \text{ kg/s}}$$

$$q_e = \dot{m} / \rho_e = \dot{m} R T_e / p_e = (0.0189)(287)(284) / 0.08E6 = \mathbf{19 \text{ l/s}}$$

$$p_b = 0.05 \text{ MPa} \quad (\text{ب})$$

$$p_b / p_0 = 0.5 < 0.528$$

إذن السريان شَرِق

$$p_e / p_0 = 0.528$$

$$p_e = 0.528(0.1E6) = 0.0528E6$$

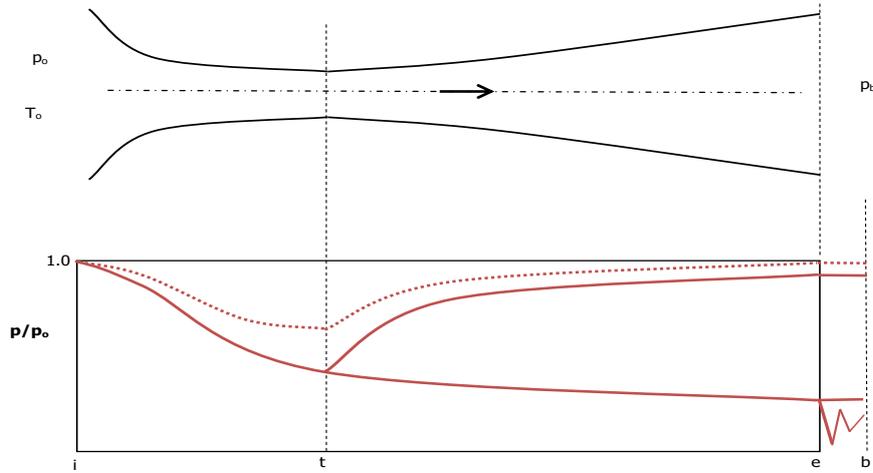
$$= \mathbf{0.023 \text{ kg/s}} \quad \square \quad m_M = 0.04 \frac{A^* P_0}{\sqrt{T_0}}$$

$$q_e = \dot{m} R T_e / p_e$$

$$= (0.8333)(303) = 252 K T_e = \frac{T^*}{T_0} T_0$$

$$q_e = \mathbf{31.5 \text{ l/s}}$$

11.3.6 توزيع الضغط في المنفت اللام-الناشر



الشكل 11.3.10

التجربة هنا شبيهة بتلك التي سردت عن المنفت اللام في القسم (11.3.5):

(أ) الضغط النهائي مساوٍ لضغط الإمداد $p_b/p_0 = 1$

مما للضغط = صفر . لا سريان.

(ب) بخفض p_b قليلاً ينشأ سريان في اتجاه x الموجب.

السريان في كل المنفت دون صوتي، و بالرجوع إلى المعادلات التفاضلية للسريان دون الصوتي - القسم (11.3.2) - يمكن إدراك أن الضغط يتناقص في الجانب اللام ليصل أدنى مستوى له في حلق المنفت ثم يتزايد في الجانب الناشر. عدد ماخ، بالتالي، يتزايد في الجانب اللام ليصل أعلى مستوى له في حلق المنفت ثم يتناقص في الجانب الناشر.

الضغط الخروجي في هذا الحال يساوي الضغط النهائي. $p_e = p_b$.

(ج) بخفض الضغط النهائي أكثر نبلغ الوضع (ج) و هو الوضع الحدودي للسلوك (ب) .

يميز السلوك (ج) أن عدد ماخ في الحلق يكون صوتياً ($M = 1$) و بذلك يكون الضغط هناك حرجاً ($p/p_0 = p^*/p_0$) و يكون السريان في كل مواضع المنفت الأخرى دون صوتي.

بدراسة المعادلة (11.3.6) يتضح أن السلوك (ج) هو أحد حلي المعادلة.

(د) السلوك (د) يطابق الحل الثاني للمعادلة (11.3.6) ، و هو الحل فوق الصوتي.

نحصل على هذا السلوك تجربينا بخفض الضغط النهائي إلى مقدار الضغط المحصل من حل المعادلتين (11.3.6) و (11.3.4) على التوالي. و السلوك (د) هنا مشابه للسلوك (ج) في الجانب اللام من المنفت. ينخفض الضغط باضطراد ليلبغ أدناه في المخرج. كما أن عدد ماخ يزداد عن القيمة الصوتية في الحلق ليلبغ أعلاه عند المخرج.

يعرف السلوك (د) ب **السلوك التصميمي** للمنفت اللام-الناشر.

(هـ) ينشأ السلوك (هـ) إذا خُفض الضغط النهائي إلى مستوى أدنى من الضغط التصميمي الخروجي المشار إليه في (د).

لا يستجيب توزيع الضغط داخل المنفت لهذا الخفض. إلا أن النفث يتعرض لخفض مفاجئ في الضغط عبر موجات تمديدية ليوائم الضغط النهائي السائد. و يصبح السريان **شرقاً**.

مثال 11.3.6

منفث لامر-ناشر موصل بمستودع إمداد به هواء ضغطه و درجة حرارته 3MPa و 400K على التوالي. المساحة الخرجية للمنفث 0.1m². المطلوب أن يخرج الهواء من المنفث بعدد ماخ 2.0. أحسب:
 (أ) مساحة حلق المنفث و الضغط النهائي و معدل السريان في الوضع التصميمي.
 (ب) أعلى ضغط خروجي ممكن و عدد ماخ المناظر لنفس معدل السريان.

(أ) عند الوضع التصميمي في المقطع الخرجي



الشكل 11.3.12

$$M_e = 2.0$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2}(k-1) M_e^2 = 1.8$$

$$= 0.128 \frac{p_e}{p_0} = \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$p_e = 0.128(3E6) = 0.383E6$$

$$p_b = p_e = \mathbf{0.383MPa}$$

$$= 1.688 \frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$A^* = A_t = (A^*/A_e)A_e = \mathbf{0.059m^2}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e p_e}{\sqrt{T_e}} \dot{m}$$

$$T_e = T_0 (T_e/T_0) = T_0 \mu_e^{-1} = (1.8)^{-1} (400) = \mathbf{222K}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \sqrt{\frac{1.4}{287(222)}} (0.1) (2.0) (0.383E6) = \mathbf{359 kg/s}$$

(ب) بالإطلاع على الرسمين يمكن استنتاج أن الضغط الأعلى الذي يعطي نفس قيمة m هو الحل الثاني (دون الصوتي). معدل السريان في الحالتين هو الأعلى - نسبةً لأن عدد ماخ يساوي 1.0 عند مرور السريان بالحلق.

$$A/A^* = 1.688$$

باستخدام قوائم السريان اللاتبيدي عند المخرج:

M	p/p₀	A/A*
2.0	0.128	1.688
0.37	0.91	1.688

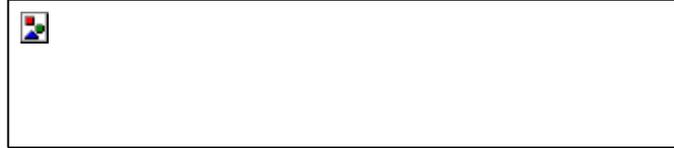
$$\rightarrow p_e = 0.383\text{MPa}, 2.7\text{E}6$$

2.7MPa الضغط الأعلى هو:

$M_e = 0.37$ و يناظر ذلك

11.3.7 الدفع الصاروخي

الدفع على الصاروخ ينشأ كرد فعل لاندفاع الغاز من منفث في مؤخرة الصاروخ – القسم (7.2). و يُفصّل التحليل أدناه المتغيرات المؤثرة في مقدار هذا الدفع.



الشكل 11.3.13

برسم حجم تحكم داخل غرفة الاحتراق و المنفث تصبح معادلة الإضطراب:

$$\iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_A \underline{\sigma} dA$$

الضغط الجوي يعمل على كل أسطح الصاروخ فيصبح صافي الضغط على السطح الخرجي $p_e - p_a$

$$\rho_e v_e^2 A_e \underline{j} = (p_e - p_a) A_e (-\underline{j}) + R_x$$

$$F_x = -R_x = [\rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e] (-\underline{j})$$

و بذلك فان الدفع في اتجاه x السالب:

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e + (p_e - p_a) A_e \quad (11.3.11)$$

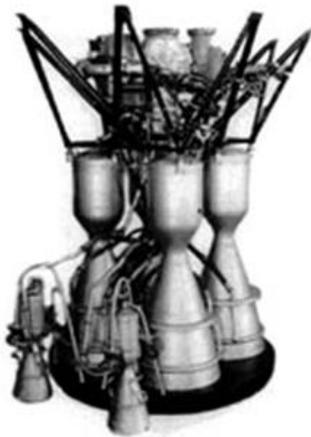
في الحالة التصميمية:

$$p_e = p_a$$

$$F_T = \rho_e v_e^2 A_e = \frac{p_a}{RT_e} (kRT_e) M_e^2 A_e$$

$$F_T = k A_e M_e^2 p_a \quad (11.3.12)$$

يبين الشكل (11.3.14) معدة دفع صاروخي من طراز RD107 مستخدم في برامج الفضاء الروسية و يشمل أربع محركات صاروخية بجانب عدد من المحركات الثانوية للتوجيه.²



RD-107

الشكل 11.3.14

² www.aerospace.ru

مثال 11.3.7

صمم محرك صاروخي ليعطي دفعاً يساوي 4.5kN عند الارتفاع 1.2km من سطح الأرض حيث الضغط الجوي 0.02MPa . درجة الحرارة و الضغط في غرفة الاحتراق 2000K و 2MPa ، على التوالي. قيمة k لغازات النفط 1.3 و الكتلة النسبية 20 .
أحسب: عدد ماخ الخروجي و المساحة الخروجية و مساحة حلق المنفت و معدل سريان غازات الاحتراق.
يمكن افتراض أن السريان في المنفت لاتبديدي و غير شريك.

للسريان غير الشريك

$$p_e = p_b = p_a = 0.02E6$$

$$p_e / p_0 = 0.01$$

المعادلة (11.3.4)

$$\mu_e = \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} = (0.01)^{0.231} = 2.89$$

$$= 3.55 M_e = \left[(\mu_e - 1) \left(\frac{2}{k-1} \right) \right]^{1/2}$$

معادلة الدفع:

$$F_T = k A_e M_e^2 p_a$$

$$4.5E3 = (1.3) A_e (3.55)^2 (0.02E6)$$

$$A_e = 0.014m^2$$

بما أن السريان فوق صوتي في الجزء الناشر فهو إذن صوتي عند الحلق

$$A^* = A_t$$

المعادلة (11.3.6) تعطي

$$= 9.63 \frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$



الشكل 11.3.15

$$A^* = A_t = 0.014/9.63 = 0.00145m^2$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{A_e M_e p_e}{\sqrt{T_e}}$$

$$T_e = (T_e/T_0) T_0 = (\mu_e^{-1}) T_0 = 692K$$

$$R = \frac{\bar{R}}{MW} = \frac{8310}{20} = 415.5$$

$$= \sqrt{\frac{1.3}{(415.5)(692)}} (0.014)(3.55)(0.02E6) = \mathbf{2.11 \text{ kg/s}}$$

مسائل

11.3.1

- (أ) أحسب سرعة الصوت في الهواء عند درجات الحرارة: 0°C , 40°C .
 (ب) أحسب سرعة الصوت في غاز الهليوم عند درجات الحرارة: 0°C , 40°C
 ($k = 1.66$, $MW = 4$)
 (ج) أحسب عدد ماخ لطائرة تتحرك بالسرعة 1000km/h في هواء ساكن في درجة الحرارة 0°C .

[355m/s, 331m/s; 1039m/s, 970m/s; 0.84]

11.3.2

- (أ) مستخدماً برنامج اكسل أو ماتلاب ارسم العلاقة $c = \sqrt{kRT}$ للهواء في المدى -50°C إلى $+50^{\circ}\text{C}$.
 (ب) على نفس المناط أرسم المنحنى التوفيقي الخطي و حدد المعادلة الخطية و قيمة المقدار R^2 .
 (ج) استخلص من المنحنيين النسبة المئوية لأكبر خطأ عند استخدام العلاقة الخطية التقريبية.
 [$c = 0.6084T + 164.54$, $R^2 = 0.9993$, 0.3%]

- 11.3.2** طائرة فوق صوتية تطير بسرعة 3000 km/h عند الارتفاع 400m . درجة حرارة الجو 15°C . ما هي المسافة الأفقية التي تقطعها الطائرة فوق مراقب أرضي قبيل سماع هذا المراقب لصوت الطائرة؟
 [895m]

11.3.3 استخلص العلاقات الآتية من الأسس الأولية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{k+1}{2\mu} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

حيث T^* و p^* قيم درجة الحرارة و الضغط عند الحالة الصوتية. μ تساوى $[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2]$.

- 11.3.4** يسرى الهليوم من مستودع كبير درجة الحرارة فيه 10°C عبر منفث لام . المساحة الخرجية للمنفت 0.0003m^2 و تؤدي إلى غرفة الضغط فيها 0.1MPa . أحسب معدل سريان الكتلة عبر المنفت إذا كان الضغط المطلق في المستودع:

(أ) 0.15 MPa ,

(ب) 0.35 MPa .

[0.04kg/s, 0.10kg/s]

11.3.5 الضغط و درجة الحرارة و السرعة تساوى 0.35MPa و K350 و 300m/s ، على التوالي ، عند مدخل أنبوب ناشر يحوى سريان لاتبيدي. إذا كانت نسبة المساحة الخرجية للمساحة الدخولية 2.5 أحسب الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند المخرج.

[0.51MPa, 391K, 91 m/s]

11.3.6 الضغط و درجة الحرارة في مستودع هواء at 0.7MPa و 15°C . المستودع موصل إلى مستودع مستقبل عبر منفث لام-ناشر. مساحة مقطعي الحلق و الخروج تساوى 0.0013 و 0.0052m²، على التوالي. احسب:

- (أ) أعلى معدل للسريان
(ب) قيم عدد ماخ الخرجية إلى تعطى أعلى معدل للسريان مع بقاء السريان داخل المنفث لاتبيدي
(ج) قيم ضغط الاستقبال المناظرة للحالة (ب) .

[2.2kg/s;2.94,0.15;0.02MPa,0.69MPa]

11.3.7 يراد نفث هواء من مستودع كبير الضغط فيه 0.3MPa و درجة الحرارة 300K إلى الجو حيث الضغط 0.1 MPa بمعدل 1.0 kg/s. باعتبار السريان داخل المنفث لاتبيدي حدد المساحة الخرجية المناسبة و عدد ماخ مستخدماً:

- (أ) منفث لام
(ب) منفث لام-ناشر
أرسم منحنى الضغط لكل حالة.

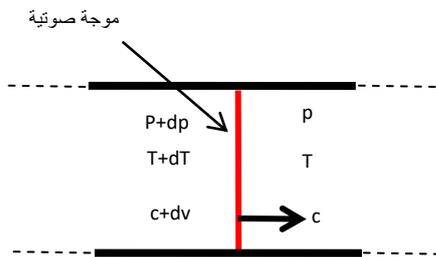
11.4 الصدمة المتعامدة

11.4.1 طبيعة الموجة الصدمية

الصدمة في ديناميكا الغاز هي الزيادة المفاجئة في ضغط الغاز. و يصحب ذلك تغيرات كبيرة في متغيرات السريان الأخرى تحدث في حيز متناهي الصغر. توصف الصدمة بالمتعامدة إذا تعامدت على اتجاه سريان الغاز. و إن لم تكن كذلك فهي **صدمة مائلة**.

و يميز الموجة الصدمية عن الموجة الصوتية أن الزيادة في الضغط المصاحبة للأولى كبيرة بينما الزيادة في الضغط ضئيلة في حالة الموجة الصوتية. تتحرك الموجة الصوتية بسرعة الصوت بطبيعة الحال بينما تفوق سرعة الموجة الصدمية سرعة الصوت.

تنشأ الموجة الصدمية أصلاً من التتابع السريع لموجات صوتية و يمكن استنتاج ذلك مما يلي:



الشكل 11.4.1

قانون الغاز المثالي: $p = R\rho T$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(1)$$

السريان اللاتبيدي: $p = \text{const.}\rho^k$

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho} \dots\dots\dots(2)$$

(1) و (2) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{k} \frac{dp}{p} = \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p} \dots\dots\dots(3)$$

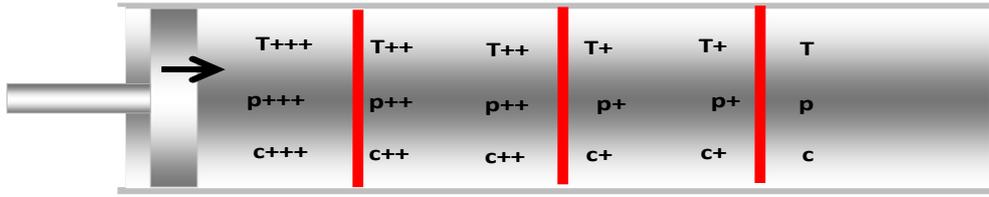
المعادلة (11.2.6): $c = \sqrt{kRT}$ تعطي

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = \frac{k-1}{2k} \frac{dp}{p} \dots\dots\dots(4)$$

بما أن $k > 1$ فإن المعادلة (3) تدل إلى أن الزيادة في الضغط بسبب الموجة الضغطية تصاحبها زيادة في درجة الحرارة. المعادلة (4) تدل إلى زيادة تفاضلية في سرعة الصوت بسبب الموجة الضغطية.

في حال تفرق الموجات الصوتية لا يكون هناك مجال لتأثرها ببعضها البعض. و بالتالي لا ينشأ أثر تراكمي عن الزيادات الطفيفة في الضغط و درجة الحرارة و سرعة الصوت.

أما في حال التتابع المضطرب للموجات الصوتية فان الأثر التراكمي يكون كما هو مبين في الشكل (11.4.2).

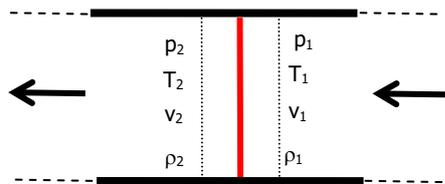


الشكل 11.4.2

الموجة الصوتية الأولى ترفع درجة الحرارة من T إلى T^+ و سرعة الصوت من c إلى c^+ . وإذا تابعت الموجات فإنها تزيد هذه المقادير زيادات تراكمية متتابعة. و ينشأ عن ذلك أن كل موجة تتحرك بسرعة أكبر من سابقتها مما يؤدي إلى أن تدرك الموجات بعضها البعض حتى تتحد في موجة واحدة. يترتب على ذلك أن فرق الضغط بين جانبي الموجة الناشئة يساوي فرق الضغط بين أول و آخر الموجات الصوتية الأساس. و إذا كان عدد الموجات الأساس كبيراً فإن هذا الفرق في الضغط لا يكون ضئيلاً. كما أن سرعة الموجة الناشئة أعلى من سرعة الصوت منسوبةً إلى الغاز الساكن. هكذا تنشأ الموجة الصدمية.

11.4.2 معادلات السريان ذو الصدمة

بتطبيق معادلات الحفظ على حجم تحكم حول صدمة متعامدة و بملاحظة أن عرض الصدمة ضئيل بما يبيح اعتبار حجم التحكم كظيم الحرارة و لا احتكاكي يمكننا استخلاص العلاقات التكاملية بين جانبي الصدمة.



الشكل 11.4.3

(1) درجة الحرارة الركودية T_0
معادلة الطاقة

$$h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$h_{o1} = h_{o2}$$

$$c_p T_{o1} = c_p T_{o2}$$

$$T_{o2} = T_{o1} = T_0 \dots\dots\dots(11.4.1)$$

و يعني ذلك أن درجة الحرارة الركودية لا تتغير نتيجة للصدمة.

(2) درجة الحرارة T

من معادلة الطاقة

$$c_p T_1 + \frac{1}{2} c_1^2 M_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} c_2^2 M_2^2$$

$$\frac{kR}{k-1} T_1 + \frac{1}{2} kRT_1 M_1^2 = \frac{kR}{k-1} T_2 + \frac{1}{2} kRT_2 M_2^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \dots\dots\dots(11.4.2)$$

(3) الضغط p_0

معادلة الإضطراب

$$\begin{aligned} \Delta(pA) + \Delta(\dot{m} v) &= 0 \\ \rho_2 A_2 - \rho_1 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 - \rho_1 v_1^2 A_1 &= 0 \\ \rho_2 - \rho_1 &= \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 \\ \rho_1 \left(1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_1} \right) &= \rho_2 \left(1 + \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_2} \right) \end{aligned}$$

معادلة الغاز الكامل

$$\rho = R\rho T$$

$$\rho_1 \left(1 + \frac{k v_1^2}{k R T_1} \right) = \rho_2 \left(1 + \frac{k v_2^2}{k R T_2} \right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \right) \dots\dots\dots(11.4.3)$$

(4) عدد ماخ M

قانون حفظ الكتلة

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho = p/RT, \quad v = cM, \quad c = \sqrt{kRT}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

و بالتعويض ل p_2/p_1 و T_2/T_1 من المعادلات (11.4.2) و (11.4.3)

$$\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2}} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2}}{1 + kM_2^2} = \frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}}{1 + kM_1^2}$$

بترتيب الجانبين:

$$\frac{M_2^2 \left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2\right]}{[1 + kM_2^2]^2} = \frac{M_1^2 \left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2\right]}{[1 + kM_1^2]^2}$$

و جعل N تساوي جانب المعادلة الأيمن و إعادة ترتيب الحدود

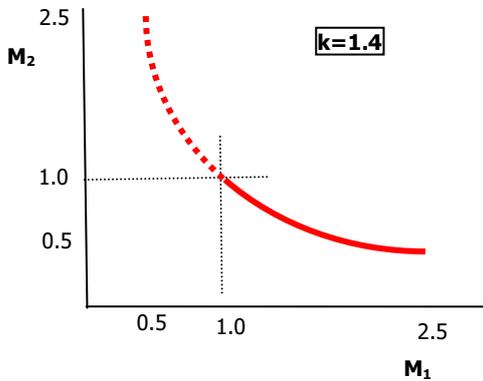
$$[\frac{1}{2}(k-1) - k^2 N] M_2^4 + [1 - 2kN] M_2^2 - N = 0$$

و باستخدام قاعدة المعادلات من الدرجة الثانية للمجهول M_2^2

$$M_2^2 = \frac{(2kN - 1) \pm \sqrt{(1 - 2kN)^2 + 4N \left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)}}{2\left(\frac{k-1}{2} - k^2 N\right)}$$

حلا المعادلة هما:

$$M_2^2 = M_1^2 M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \quad \text{و}$$



الشكل 11.4.4

بما أن الحل الأول غير ذي أهمية في التطبيق فإن العلاقة بين M_2 و M_1 تصبح:

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \dots\dots\dots(11.4.4)$$

الشكل (11.4.4) يوضح العلاقة (11.4.4) .

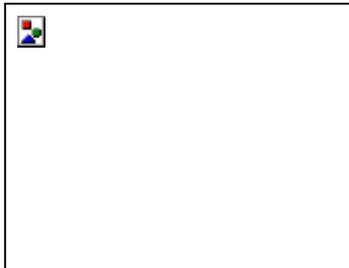
و يمكن التبدليل منهما على الإمكانية النظرية لحدوث الصدمة سواء كان السريان فوق صوتي أم دون صوتي.

إلا أن التجربة تدل على اقتصار حدوث الصدمة على السريان فوق الصوتي. و يمكن تفسير ذلك بالرجوع إلى القانون الثاني للديناميكا الحرارية.

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \dots\dots\dots(11.1.11)$$

بالتعويض في (11.1.11) من المعادلتين (11.4.2) و (11.4.3) نحصل ل: T_2/T_1 و p_2/p_1 ثم التعويض من (11.4.4) ل M_2 نحصل على علاقة معقدة بعض الشيء تربط $s_2 - s_1$ بالمقادير M_1 و k . يوضح الشكل (11.4.5) منحنياً لهذا الحل.

القانون الثاني لديناميكا الحرارة ينص على أن الشرط اللازم لحدوث أي عملية **1-2** هو أن يكون فرق التبريد $s_2 - s_1$ موجباً. و يدل المنحنى في الشكل (11.4.5) أن ذلك يحدث فقط عندما



الشكل (11.4.5)

تكون $M_1 > 1$ ، وبذلك فإن القانون الثاني للديناميكا الحرارية هو الذي يفسر اقتصار حدوث الصدمة على السريران فوق الصوتي.

(5) الضغط الركودي p_0

المعادلتان (11.4.3) و (11.3.4) تعطيان

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

و بالتعويض في القوس المربع من المعادلة (1)

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.4.5)$$

(6) المساحة الحرجة A^*

باعتبار A هي المساحة عند مقطع الصدمة

$$= \frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

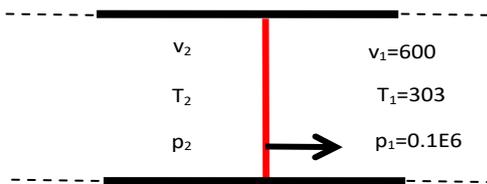
و بالتعويض من المعادلة (11.3.6)

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.4.6)$$

عند مقارنة المعادلتين (11.4.5) و (11.4.6) نستنتج

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \dots\dots\dots(11.4.7)$$

مثال 11.4.1



الشكل 11.4.6

موجة صدمية متعامدة تتحرك في أنبوب بسرعة 600m/s . درجة الحرارة و الضغط في الهواء الساكن قبل مرور الموجة 30°C و 0.1MPa ، على التوالي (الشكل 11.4.6).

أحسب عدد ماخ على جانبي الموجة بالنسبة إلى مناط مثبت على الموجة. أحسب أيضاً الزيادة في درجة الحرارة و الضغط بسبب مرور الموجة الصدمية.

$$M_1 = \frac{v_1}{c_1} = \frac{v_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$T_1 = 30 + 273 = 303K$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{600}{\sqrt{1.4(287)(303)}} = \mathbf{1.72}$$

المعادلة (11.4.4) تعطي $M_2 = \mathbf{0.64}$

والمعادلة (11.4.3) تعطي

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\mu_1 = 1.59, \mu_2 = 1.08 \rightarrow T_2 = 445 = \mathbf{172^\circ C}$$

$$\Delta T = 172 - 30 = \mathbf{142^\circ C}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} = \mathbf{0.33 MPa}$$

$$\Delta p = (0.33 - 0.1)E6 = \mathbf{0.23 MPa}$$

عدد ماخ الخروجي M_e

يحتاج تحديد قيمة M_e في حال حدوث صدمة داخل المنفت لمعالجة خاصة. يتذكر أن $A_2^* \neq A_1^*$ في حالة الصدمة فان كل المتغيرات اللابعدية التي تسبق الصدمة - أي قبل الموضع (1) - تحمل قيمها المرجعية اللاحقة **1**، مثلاً A/A_1^* و p/p_{01} . بينما المتغيرات اللابعدية التي تلي الصدمة - أي بعد الموضع (2) - تحمل قيمها المرجعية الرمز **2**، مثلاً A_e/A_2^* و p_e/p_{02} . و بذلك فان M_e تحسب من المقادير اللابعدية ذات اللاحقة **2**.

يعتمد التحليل التالي على حاصل الضرب $\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)$$

المقدار داخل القوس = 1 - المعادلة (11.4.7).

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \dots \dots \dots (11.4.8)$$

و من المعادلتين (11.3.4) و (11.3.6)

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \frac{1}{M_e} \left(\frac{2\mu_e}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \mu_e^{-\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{A_e}{A_2^*} \frac{p_e}{p_{02}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{M_e \sqrt{\mu_e}} \dots \dots \dots (1)$$

المعادلتان (1) و (11.4.8) تعطيان

$$M_e \sqrt{\mu_e} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}}}$$

$$M_e^2 \mu_e = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} \right)^2}$$

و بتسمية الجانب الأيمن B

$$M_e^2 \mu_e = B$$

$$M_e^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M_e^2 \right] = B$$

و باتخاذ $N = M_e^2$

$$N \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) N \right] = B$$

$$\frac{1}{2}(k-1)N^2 + N - B = 0 \dots\dots\dots(2)$$

حل المعادلة (2)

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(k-1)B}}{k-1}$$

و بإبعاد الحل السالب لأنه يعطي قيمة خيالية

$$M_e^2 = \frac{\sqrt{1 + 2(k-1)B} - 1}{k-1} \dots\dots\dots(11.4.9)$$

حيث

$$B = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{A_e p_e}{A_1^* p_{01}} \right)^2}$$

و يمكن استخدام قوائم الغاز أيضاً من العمود $\frac{p}{p_0} \frac{A}{A^*}$ لمعرفة M_e و القيم اللابعدية الأخرى إذا كانت

$k=1.4$ (الملحق هـ).

مثال 11.4.2

الضغط في مستودع هواء يساوي 2.0MPa . يُصْرَفُ المستودع الهواء عبر منفث لامر- ناشر قطر حلقه 10mm و قطر مقطعه الخروجي 27mm

(أ) حدد الحدود التشغيلية للمنفث.

(ب) حدد سلوك السريان في المنفث للحالين:

ب(1) الضغط النهائي 0.5MPa

ب(2) الضغط النهائي 0.1MPa.



الشكل 11.4.8

(أ) الحدود التشغيلية للمنفث: A و B و D

$$A^* = A_t$$

$$= 7.45 \frac{A_e}{A^*} = \left(\frac{0.027}{0.010} \right)^2$$

باستخدام قوائم السريران اللاتبيدي

p/p_0	M	A/A^*	
0.01138	3.6	7.45	عند D
0.995	0.08	7.45	عند A

$$p_D = (0.01138)2.0E6 = \mathbf{0.02276E6 Pa}$$

$$p_A = (0.995)2.0E6 = \mathbf{1.99E6Pa}$$

و لحساب p_B :

تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة عند المقطع الخرجي:

p_2/p_1	M_2	M_1
14.95	0.447	3.6

$$p_1 = p_D = 0.02276E6 Pa$$

$$p_2 = p_B = (14.95)0.02276E6 = \mathbf{0.34E6 Pa}$$

(ب1) الضغط النهائي $p_b = 0.5E6$

$$p_B < p_b < p_A$$

و يعني ذلك حدوث موجة صدمية في الجانب الناصر من المنفذ.

لحساب قيم M_1 و M_2 و M_e

$$\frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} = 7.45 \frac{0.5E6}{2.0E6} = 1.863$$

قيمة B في المعادلة (11.4.9)

$$B = \mathbf{0.0965}$$

و بالتعويض في (11.4.9)

$$M_e = \mathbf{0.31}$$

$$\mu_e = 1 + \frac{1}{2} (k-1)M_e^2 = 1.019$$

$$= \mu_e^{\frac{-k}{k-1}} = 0.936 \frac{p_e}{p_{02}}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

يمكن استخدام قوائم السريران اللاتبيدي

$$= \frac{A_e}{A_1^*} \frac{p_e}{p_{01}} = 1.863 \frac{p_e}{p_{02}} \frac{A_e}{A_2^*}$$

و تعطي القائمة

P/p_0	$\frac{A}{A^*} \frac{p}{p_0}$
0.936	1.863

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}} = \frac{1}{0.936} \frac{0.5E6}{2E6} = 0.267$$

لحساب M_1 و M_2 تستخدم قوائم الصدمة المتعامدة

P_{02}/p_{01}	M_1	M_2
0.267	3.24	0.46

(ب) الضغط النهائي $p_b = 0.1E6$

$$p_D < p_b < p_B$$

و يعني ذلك أن السريان لاتبديدي في المنفت مصحوب بصدمة مائلة سافل المنفت.

مسائل

11.4.1 يُؤدى اختبار لقبلة نووية إلى بعث موجة صدمية بسرعة 60km/s في هواء ساكن الضغط الجوي فيه 0.1MPa و درجة حرارته الابتدائية 30°C . قَدِّر التغيرات الناشئة في الضغط و درجة الحرارة و السرعة عند نقطة ثابتة.

11.4.2 ينقذ هواء مضغوط من مستودع الضغط فيه 0.7MPa و درجة الحرارة 340K عبر منفث لام- ناشر. لوحظت موجة صدمية ساكنة عند مقطع الضغط فيه 0.2MPa . أحسب الضغط الخروجي و قطر مقطع الخروج إذا كان معدل السريان 0.5kg/s و عدد ماخ الخروجي 0.5. [0.554MPa, 24mm]

11.4.3 صُمم منفث لام- ناشر لنقل غاز ($k=1.3, R=300 \text{ J/kg-K}$) ضغطه و درجة حرارته الركوديتين 1.0MPa و 400K على التوالي لينفث في مستودع مُستقيل الضغط فيه 0.2MPa بمعدل 0.4kg/s .

(أ) أحسب قُطري المنفث.

(ب) إذا ارتفع ضغط الاستقبال إلى 0.8MPa أحسب:

(1ب) عدد ماخ الخروجي

(2ب) عددي ماخ قبل و بعد الصدمة الناشئة

(3ب) قطر المُعجّل في موقع الصدمة.

[16mm, 19mm, 0.51, 1.44, 0.72, 17mm]

11.4.4 صُمم منفث لمُحرك صاروخي ليعمل بكفاءته الفضلى على ارتفاع 30km فوق سطح الأرض. نسبة مساحة المخرج لمساحة الحلق 5.0 . باعتبار أن الضغط الجوي على سطح الأرض 0.1MPa و الضغط داخل حجرة الاحتراق 2.0MPa و أن قيمة k لغازات الاحتراق 1.2 أحسب نسبة قوة الدفع عند سطح الأرض إلى نظيرتها عند الارتفاع 30km . [0.94]

11.5 السريان الإنضغاطي الاحتكاكي

11.5.1 مقدمة

دراسة السريان الإنضغاطي الاحتكاكي في صورته العامة مُعقدة، إلا أنه يمكن تبسيط الدراسة كثيراً إذا حصرت في الافتراضات الآتية:

- (1) السريان أحادي البعد
- (2) كظيم الحرارة
- (3) مساحة مقطع السريان ثابتة
- (4) السريان رتيب.
- (5) الغاز كامل.

و يسمى السريان الذي يُوفي الافتراضات أعلاه **سريان فانو** .

تعريف:

$$f = \frac{4\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad (1)$$

العلاقة أعلاه تعرّف **معامل الاحتكاك** f بدلالة الإجهاد القصي و متوسط السرعة و متوسط الكثافة عند نفس المقطع. سبق استخدام f بنفس التعريف في علاقة دارسي للسريان اللانضغاطي - المعادلة (4.3). و يعتمد المعامل f على كل من عدد رينولز Re و الخشونة اللابعدية k/d .

(2) يعرّف **القطر السرياني** D بالعلاقة:

$$D = 4 \times (\text{مساحة مقطع السريان} \setminus \text{محيط المقطع})$$

لاحظ أن قيمة D للمقطع الدائري تساوي d (قطر المقطع).

(3) المقدار اللابعدي $f \frac{x}{D}$ يبرز مراراً في معادلات السريان الاحتكاكي، و يمكن، بداعي الاختصار،

$$\text{تعريف معامل الاحتكاك } \varphi : \varphi = \frac{fx}{D} \quad \text{و بالتالي: } d\varphi = \frac{f}{D} dx$$

11.5.2 المعادلات التفاضلية للسريان الاحتكاكي

نسعى هنا لتكوين علاقات تفاضلية تربط المتغيرات: $\rho, T,$

$$\rho, p_0, v, \varphi, M$$

و نبدأ من علاقات الحفظ و بعض العلاقات الثانوية.

بالتطبيق على حجم التحكم التفاضلي:

معادلة الاستمرارية:

$$\rho v = \text{const.}$$



الشكل 11.5.1

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(2)$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}, M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{kRT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(3)$$

معادلة الطاقة:

$$h + \frac{1}{2}v^2 = const$$

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$C_p dT + vdv = 0$$

$$\frac{kRT}{k-1} \frac{dT}{T} + vdv = 0$$

$$+ vdv = 0 - \frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T}$$

$$\frac{c^2}{v^2} \frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)M^2 \frac{dv}{v} \dots\dots\dots(4)$$

معادلة حفظ الإضطراب:

$$d(\rho A) + d(\rho v^2 A) + d(\tau_w A_w) = 0$$

$$A dp + d(\rho v^2 A) + \tau_w dA_w = 0$$

بما أن: ثابت $\rho v A =$

$$d(\rho v^2 A) = \rho v A dv$$

$$A dp + \rho v A dv + \tau_w dA_w = 0$$

$$dp + \tau_w \frac{dA_w}{A} + \rho v^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots \dots \dots (4b)$$

$$\frac{dA_w}{A} = 4 \frac{dx}{D}$$

و من تعريف المعامل f

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{f}{4}$$

$$\rho v^2 = \frac{p}{RT} c^2 M^2 = \frac{pkRTM^2}{RT} = kpM^2$$

$$\tau_w = \frac{1}{2} kpM^2 \frac{f}{4}$$

$$\tau_w \frac{dA_w}{A} = \frac{1}{2} kpM^2 \frac{f}{4} \left(4 \frac{dx}{D} \right) = \frac{1}{2} kpM^2 f \frac{dx}{D} = \frac{1}{2} kpM^2 d\varphi$$

و بالتعويض في (4b)

$$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2} kM^2 d\varphi + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

الضغط الركودي:

$$p_0 = p \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{\left[1 + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \right]} \frac{dM}{M} \dots \dots \dots (6)$$

تلك ست معادلات تضم سبعة مجاهيل هي:

$$\frac{dM}{M}, \frac{dp}{p}, \frac{dT}{T}, \frac{d\rho}{\rho}, \frac{dv}{v}, \frac{dp_0}{p_0}, d\varphi$$

و بذلك يمكن صياغة المعادلات الستة الأولى بدلالة المتغير السابع $d\varphi$.

نبدأ بوضع النسبة $\frac{dM}{M}$ كمتغير مستقل:

(3) و (4) تعطيان

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} + \frac{1}{2} (k-1) M^2 \frac{dv}{v} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right] \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\mu} \frac{dM}{M} \dots \dots \dots (7)$$

(1) و (7) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(8)$$

(4) و (7) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)M^2}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(9)$$

(2) و (8) و (9) تعطي

$$\frac{dp}{p} = -\frac{[1+(k-1)M^2]}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(10)$$

(6) و (10) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{(1-M^2)}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11)$$

و بتعويض المقادير (10) و (7) في (5)

$$\frac{1}{2} kM^2 d\varphi = \frac{1+(k-1)M^2 - kM^2}{\mu} \frac{dM}{M} = \frac{(1-M^2)}{\mu} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} \mu d\varphi \dots\dots\dots(11.5.1)$$

(10) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2[1-(k-1)M^2]}{2(1-M^2)} d\varphi \dots\dots\dots(11.5.2)$$

(9) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)kM^4}{2(1-M^2)} d\varphi \dots\dots\dots(11.5.3)$$

(8) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)} d\varphi \dots\dots\dots(11.5.4)$$

(1) و (11.5.4) تعطيان

$$\frac{dv}{v} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} d\phi \dots\dots\dots(11.5.5)$$

(11) و (11.5.1) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{1}{2}kM^2 d\phi \dots\dots\dots(11.5.6)$$

لاحظ أن تزايد و تناقص المتغيرات M, p, T, ρ, v يعتمد على ما إذا كانت قيمة M أعلى أم أقل من 1.0 بسبب احتواء التعبيرات على الحد $1 - M^2$. إلا أن p_0 ، الضغط الركودي، يتناقص مطلقاً في اتجاه السريان.

دراسة المعادلة (11.5.1) توضح سمة هامة للسريان الإنضغاطي الاحتكاكي في الأنابيب: تزداد قيمة عدد ماخ في السريان دون الصوتي و تتناقص في السريان فوق الصوتي. ويعني ذلك أن عدد ماخ ينتجه نحو القيمة الصوتية في كل الأحوال.

دراسة المعادلة (11.5.2) توضح أن تغير الضغط في المدى فوق الصوتي يعتمد أيضاً على عدد حرج إضافي هو

$$.M = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

11.5.3 المعادلات التكاملية للسريان الاحتكاكي

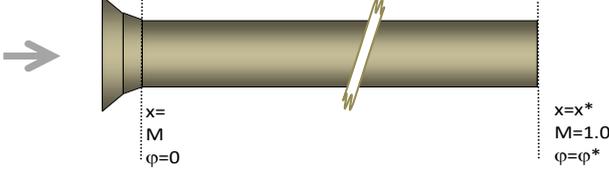
بدراسة السريان الموضح في الشكل (11.5.2) داخل أنبوب قطره السرياني D نسعى لإيجاد المسافة x^* اللازمة لرفع قيمة M إلى 1.0 .

بدءً من المعادلة (11.5.1) نعوض ل $d\varphi$

$$\text{بالمقدار } f \frac{dx}{D}$$

و نكامل من $x = 0$ إلى $x = x^*$ المناظرتين M و $M = 1.0$ على التوالي

$$d\varphi = \frac{f}{D} dx = \frac{2(1-M^2)}{kM^3\mu} dM$$



الشكل 11.5.2

$$\frac{1}{D} \int_0^{x^*} f dx = \frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1-M^2}{M^3\mu} dM$$

$$\varphi^* = f \frac{x^*}{D} = \text{الجانب الأيسر}$$

و يمكن مكاملة الجانب الأيمن بطريقة الكسور الجزئية
= الجانب الأيمن

$$\frac{2}{k} \int_M^1 \frac{1-M^2}{M^3\mu} dM = \frac{2}{k} I$$

$$\frac{1-M^2}{M^3[1+\frac{k-1}{2}M^2]} = \frac{A}{M} + \frac{B}{M^2} + \frac{C}{M^3} + \frac{DM+E}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$$

$$1-M^2 = A[M^2 + \frac{1}{2}(k-1)M^4] + B[M + \frac{1}{2}(k-1)M^3] + C[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2] + DM^4 + EM^3$$

$$0 = A \cdot \frac{1}{2}(k-1) + D$$

$$0 = B \cdot \frac{1}{2}(k-1) + E$$

$$-1 = A + C \cdot \frac{1}{2}(k-1)$$

$$0 = B$$

$$1 = C$$

A	B	C	D	E
$-\frac{1}{2}(k+1)$	0	1	$(k+1)(k-1)/4$	0

$$\frac{1-M^2}{M^3\mu} = -\frac{k+1}{2M} + \frac{1}{M^3} + \frac{(k+1)(k-1)M}{4\mu}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(k+1) \ln M$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - M^2}{M^2}$$

$$I_3 = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{M dM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{8} \int_{M^2}^{1.0} \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \mu$$

$$d\mu = \frac{k-1}{2} dM^2$$

$$I_3 = \frac{(k+1)}{4} \int_M^{1.0} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{(k+1)}{4} [\ln \mu]_{M^2}^{1.0} = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{k+1}{2[1 + \frac{k-1}{2} M^2]}$$

$$I = \frac{(k+1)}{4} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} + \frac{1-M^2}{2M^2}$$

$$\varphi^* = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)M^2}{2\mu} \dots\dots\dots(11.5.7)$$

ويمكن على هذا النسق استخلاص معادلات ل: p, T, v, ρ_0 عند أي مقطع في المجرى متخذين القيم الصوتية كمرجع.

بدءً من المعادلة (11.5.2) و بالتعويض من المعادلة (11.5.1) ل $d\varphi$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1+(k-1)M^2}{M\mu} dM$$

نكامل في المدى p إلى p^* المناظر للمدى M إلى 1.0

$$\int_p^{p^*} \frac{dp}{p} = - \int_M^1 \frac{1+(k-1)M^2}{M\mu} dM$$

$$\ln \frac{p^*}{p} \text{ الجانب الأيسر}$$

و باستخدام الكسور الجزئية في الجانب الأيمن

$$-\frac{1+(k-1)M^2}{M[1+\frac{k-1}{2}M^2]} = -\frac{1}{M} - \frac{(k-1)M}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$I = -\int_M^1 \frac{dM}{M} - \frac{k-1}{2} \int_M^1 \frac{MdM}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \frac{k-1}{4} \int_M^1 \frac{dM^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln [1+\frac{k-1}{2}M^2] \Big|_M^{1.0}$$

$$= \ln M - \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}$$

$$= \ln M - \ln \sqrt{\frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}}$$

$$\ln \frac{p^*}{p} = \ln \frac{M}{\sqrt{\frac{k+1}{2[1+\frac{k-1}{2}M^2]}}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \dots\dots\dots(11.5.8)$$

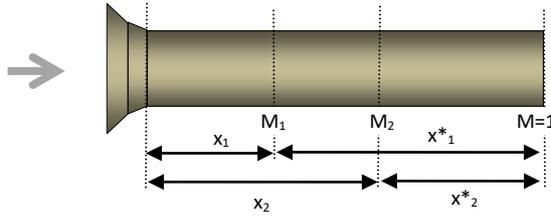
و بنفس الأسلوب يمكن استخلاص المعادلات الآتية:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2\mu} \dots\dots\dots(11.5.9)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2\mu}{k+1}} \dots\dots\dots(11.5.10)$$

$$\frac{v}{v^*} = M \sqrt{\frac{k+1}{2\mu}} \dots\dots\dots(11.5.11)$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots\dots\dots(11.5.12)$$



بالاستعانة بالشكل (11.5.3) يُمكن ربط معاملات الاحتكاك الموضعية φ^*_1 و φ^*_2 و المعامل الكلي φ_{12} كما يلي

الشكل 11.5.3

$$x_2 - x_1 = x_1^* - x_2^*$$

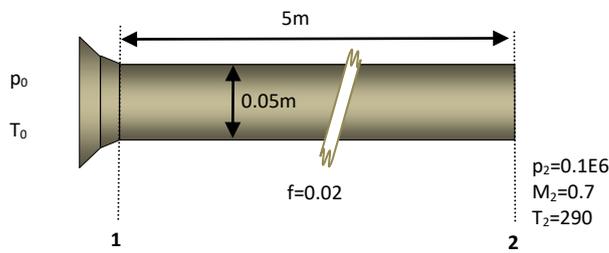
$$\frac{\bar{f}}{D} (x_2 - x_1) = \frac{\bar{f}}{D} (x_1^* - x_2^*) = \bar{f} \frac{x_1^*}{D} - \bar{f} \frac{x_2^*}{D}$$

$$\varphi_{12} = \varphi^*_1 - \varphi^*_2 \dots\dots\dots(11.5.13)$$

الملحق هـ يُدرج قوائم المقادير اللابعدية للسريان الاحتكاكي للهواء.

مثال 11.5.1

أنبوب قطره 50mm مُوصل بمستودع هواء. الضغط و درجة الحرارة و عدد ماخ عند مقطع على مسافة



الشكل 11.5.4

5m سافل مدخل الأنبوب يعادلون 0.1MPa و 290K و 0.7 ، على التوالي. متوسط قيمة معامل الاحتكاك $f = 0.02$. يمكن افتراض أن السريان كظيم الحرارة في الأنبوب و لاتبيدي في المنفت. قَدّر قيم الضغط و درجة الحرارة في المستودع.

باعتبار السريان لاتبيدي في المقطع 1-0:

$$\rho_0 = \rho_{01}$$

$$= \frac{P_{01}}{P_0^*} \frac{P_0^*}{P_{02}} \frac{P_{02}}{P_2} \frac{P_{01}}{P_2}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.02 \frac{5}{0.05} = 2$$

س ف (2)

M	Φ_2^*	p_0/p_0^*
0.7	0.208	1.094

$$\varphi^*_{12} = \varphi_{12} + \varphi^*_2 = 2 + 0.208 = 2.208$$

س ف (1)

Φ^*	p_0/p_0^*
2.208	1.54

س ل ت (2):

M	p/p_0
0.7	0.721

$$P_{01} = 0.1E6 (1.54)(1/1.094)(1/0.721) = 0.20E6 = \mathbf{0.20 MPa}$$

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = (T_{02}/T_{01})T_2$$

س ل ت (2):

M	T/T_0
0.7	0.911

$$T_0 = \mathbf{318K}$$

11.5.4 توزيع الضغط في أنبوب موصل بمنفت لام

11.5.4.1 تأثير الضغط النهائي



الشكل (11.5.5) يوضح منظومة مكونة من أنبوب رفيع موصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفت ناعم و موصل من الجانب السفلي بمستودع مستقل يمكن التحكم في ضغطه الذي يشكل الضغط النهائي p_b للأنبوب. المراحل المفصلة أدناه توضح ما يحدث للسريان عند تغيير الضغط النهائي p_b :

(1) p_b أقل قيمة من p_{01}

يتناقص الضغط في المنفت في اتجاه السريان بسبب تناقص المساحة. و يتناقص الضغط في الأنبوب بسبب الاحتكاك.

(2) السلوك الحدودي.

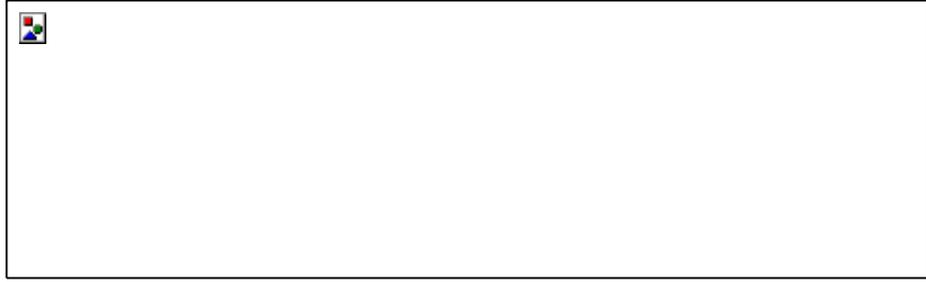
الضغط الخرجي = الضغط الحرج p_e
 $= p^*$

لاحظ أن الضغط الخرجي للمنفت أعلى من القيمة الحرجة للمنفت.

(3) p_b أقل قيمة من القيمة الحدودية. لا يتأثر السريان داخل المنظومة بإنقاص p_b و يصير شَرِقاً. تحدث موجة تمددية سافل المنظومة.

الشكل 11.5.5

11.5.4.2 تأثير الاحتكاك



الشكل (11.5.6)

ندرس في هذه الحالة تأثير φ على توزيع الضغط في المنظومة مع ثبات ضغط الإمداد و الضغط النهائي.

$$\varphi = \varphi_0 = 0 \quad (0)$$

أنبوب ضئيل الاحتكاك. ميل الضغط في اتجاه السريان = صفر.
موجة تمددية سافل المنظومة.

$$M_e = 1.0, p_e = p_{is}^*$$

$$\varphi = \varphi_1 > 0 \quad (1)$$

فقد في الضغط بسبب الاحتكاك.

موجة تمددية أصغر حجماً. $M_e = 1.0$

$$\varphi = \varphi_2 > \varphi_1 \quad (2)$$

سلوك حدودي. $M_e = 1.0, p_e = p_b$

$$M_e < 1.0, p_e = p_b \quad \varphi = \varphi_3 > \varphi_2 \quad (3)$$

يصبح ميل الضغط أعلى بسبب الاحتكاك. و هذا يجعل ضغط الدخول للأنبوب أعلى قيمة.



الشكل 11.5.7

مثال 11.5.2

أنبوب معزول حرارياً قطره 80mm و طوله 26.5mm موصل إلى مستودع هواء بواسطة منفث لام. الضغط في المستودع 0.5MPa و درجة الحرارة 300K . الجانب السفلي للأنبوب مفتوح للجو حيث الضغط 0.1MPa .
(أ) إذا كان متوسط معامل الاحتكاك للأنبوب يعادل 0.016 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و معدل السريان الكتلي.

(ب) إذا نَعَم سطح الأنبوب الداخلي لتنفص قيمة f إلى 0.008 أحسب الضغط و درجة الحرارة عند المخرج و أحسب الزيادة في المائة لمعدل السريان.

$$f = 0.016 \quad (\text{أ})$$

تحديد p^* :

$$= \frac{p^*}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \frac{p^*}{p_{01}}$$

$$\varphi_{12} = \frac{fL}{D} = 0.016 \frac{26.5}{0.08} = 5.3$$

بما أن افتراض حرج السريان عند مخرج الأنبوب يستوجب $\varphi_{2^*} = 0$

$$\varphi_{1^*} = \varphi_{12} = 5.3$$

س ف (1)

Φ^*	M	p/p^*
5.3	0.3	3.619

س ل ت (1)

M	p/p_0
0.3	0.940

$$p^* = 0.5E6(1/3.619)(0.940) = 0.13E6 \text{ Pa}$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شَرِق.

$$M_e = 1.0$$

$$p_2 = p^* = \mathbf{0.13MPa}$$

$$P_1 = (0.94)(0.5)E6 = 0.471E6$$

و عن درجة الحرارة T_2 :

$$T_{02} = T_{01} = T_0 = 300$$

$$T_2 = (T/T_0)T_0$$

س ل ت (2):

M	T/T_0
1.0	0.833

$$T_2 = (0.833)300 = \mathbf{250K}$$

و عن \dot{m} :

$$= \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = \mathbf{3.0 \text{ kg/s m}}$$

$$f = 0.008 \quad (\text{ب})$$

$$\varphi_{12} = 2.65$$

تحديد p^* :

$$\varphi_{1^*} = \varphi_{12} = 2.65$$

س ف (1):

Φ^*	M	p/p*
2.65	0.383	2.819

س ل ت (1)

M	p/p ₀
0.383	0.904

$$p^* = 0.5E6(1/2.819)(0.904) = 0.172E6 \text{ Pa}$$

$$p_b < p^*$$

الأنبوب شرف

$$M_e = 1.0$$

$$P_2 = p^* = \mathbf{0.172MPa}$$

$$P_1 = (0.904)(0.5)E6 = 0.455E6$$

$$T_2 = (T/T_0)_2 T_0 = \mathbf{250K}$$

M	T/T ₀
---	------------------

$$\text{kg/s}825 = \sqrt{\frac{k}{RT_2}} A_2 M_2 p_2 = \mathbf{3. \dot{m}}$$

الزيادة في المائة في معدل السريان الكتلي =

$$(3.825 - 3.01)100/3.01 = \mathbf{27\%}$$

و تسبب في ذلك انخفاض قيمة f بنسبة $\mathbf{50\%}$.

مسائل

11.5.1 الضغط و عدد ماخ عند المقطع (1) لأنبوب يحوي سريان كظيم للهواء يعادلان 0.3MPa و 0.3 ، على التوالي. طول الأنبوب 15m و قطره 30mm . متوسط معامل الاحتكاك 0.01 . احسب عدد ماخ عند المقطع (2) و الانخفاض في الضغط بين المقطعين. [0.66, 0.168MPa]

11.5.2 أنبوب معزول حرارياً قطره 100mm و متوسط معامل الاحتكاك 0.025 . يراد استخدامه لنقل هواء بمعدل 3.0kg/s . درجة الحرارة و الضغط عند المدخل 60°C و 0.2MPa ، على التوالي. ما هو الطول المطلوب ليعطي حالة خروج صوتية؟ [4.3m]

11.5.3 أثبت أن معدل السريان لغاز كامل كظيم الحرارة في أنبوب شريق

$$\dot{m} = Ap * \sqrt{\left[\frac{k(k+1)}{2RT_o} \right]}$$

أنبوب معزول حرارياً قطره 50mm و طوله 0.5m و متوسط معامل الاحتكاك 0.02 أوصل بمستودع هواء مضغوط عبر منفث لام ناعم. الضغط في المستودع 0.7MPa و درجة الحرارة الركودية 330K . مستوى الضغط النهائي من الانخفاض بحيث يعطي سريان شريق.

(أ) قَدِّر معدل سريان الكتلة

(ب) قارن النتيجة في (أ) بمعدل السريان الذي ينشأ إذا نزع الأنبوب و عرّض مخرج المنفث إلى نفس الضغط النهائي المنخفض. [2.80 kg/s, 3.03kg/s]

11.5.4 ينفث هواء من مستودع إمداد عبر منفث ناعم قصير و أنبوب طوله 10m . الضغط في المستودع 0.4MPa و درجة الحرارة الركودية 35°C . الضغط النهائي 0.1MPa . الخياران المتوفران لأقطار الأنابيب هما: 40mm و 80mm . بافتراض أن متوسط معامل الاحتكاك لكل من الأنبوبين 0.025 أحسب معدل سريان الكتلة لكل حالة.

[2.65kg/s, 0.53kg/s]

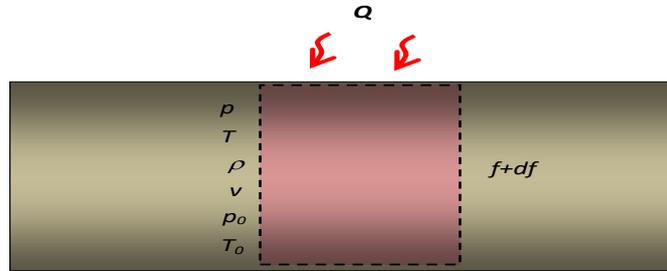
11.6 السريان الإنضغاطي اللاكظمي

11.6.1 مقدمة

دراسة السريان الإنضغاطي مع انتقال الحرارة في هذا الفصل مقيّد بالافتراضات الآتية:

- السريان أحادي البعد
- ضئيل الاحتكاك
- مساحة مقطع السريان ثابتة
- السريان رتيب
- غاز كامل.

و يسمى السريان الذي يوفي الافتراضات أعلاه **سريان ريلي** .



الشكل 11.6.1

11.6.2 المعادلات التفاضلية

محتوى الطاقة في الصورة التفاضلية - الشكل (11.6.1):

$$d\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$

$$dh + vdv = dh_0$$

$$c_p dT + vdv = c_p dT_0$$

$$\frac{kR}{k-1} T \frac{dT}{T} + v^2 \frac{dv}{v} = \frac{kR}{k-1} T_0 \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{c^2}{k-1} \frac{dT}{T} + c^2 M^2 \frac{dv}{v} = \frac{c^2}{k-1} \mu \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\frac{1}{(k-1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{(k-1)M^2} \mu \frac{dT_0}{T_0} \dots\dots\dots(1)$$

معادلة حفظ الإضطراب:

$$d(A\rho) + d(\rho v^2 A) = 0$$

$$dp + d(\rho v^2) = 0$$

$$dp + d(\rho v^2) = dp + \rho v dv + v d(\rho v) = dp + \rho v dv = 0$$

$$dp + \rho v dv = 0$$

$$+ \frac{k v}{kRT} dv = 0 \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dp}{p} + kM^2 \frac{dv}{v} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

الاستمرارية:

$$+ \frac{dv}{v} = 0 \frac{d\rho}{\rho}$$

تعريف عدد ماخ:

$$M = \frac{v}{c}$$

$$M^2 = \frac{v^2}{kRT}$$

$$= \frac{dv^2}{v^2} - \frac{dT}{T} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$2 \frac{dM}{M} = 2 \frac{dv}{v} - \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(4)$$

قانون الغاز الكامل:

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \dots\dots\dots(5)$$

المعادلة (11.3.4)

$$p_0 = p \mu^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{\mu} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(6)$$

المعادلات (2) و (3) و (4) و (5) تعطي

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.1)$$

(11.6.1) و (3) تعطيان

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.2)$$

(11.6.1) و (2) تعطيان

$$\frac{dp}{p} = - \frac{2kM^2}{1+kM^2} \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.3)$$

(11.6.1) و (4) تعطيان

$$\frac{dT}{T} = 2 \left[\frac{1-kM^2}{1+kM^2} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.4)$$

(1) و (11.6.1) و (11.6.4) تعطي

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{2(k+1)(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.5)$$

(11.6.3) و (6) تعطيان

$$\frac{dp_0}{p_0} = - \left[\frac{kM^2(1-M^2)}{(1+kM^2)\mu} \right] \frac{dM}{M} \dots\dots\dots(11.6.6)$$

أثر عدد ماخ على سلوك المتغيرات الأخرى

(1) المعادلة الرئيسية في هذه الحالة هي (11.6.5)

إضافة حرارة تعني أن dT_0 موجبة. و يتبع ذلك أن عدد ماخ يزيد إذا كان السريان دون صوتي، و ينقص إذا كان السريان فوق صوتي.

(2) أدرس التأثير المترتب من ذلك على dp و $d\rho$ و dp_0 و dT .

(3) لاحظ أن $M=1$ ليست قيمة حرجة للمتغير p_0 وأن $M = \frac{1}{\sqrt{k}}$ قيمة حرجة للمتغير T .

11.6.3 المعادلات التكاملية

نعتبر الوضع مرجعي عند $M = 1.0$ و نكامل المعادلات (11.6.1) - (11.6.6). لتوضيح طريقة المكاملة خذ المعادلة (11.6.1):

$$\int_v^{v^*} \frac{dv}{v} = \int_M^1 \frac{2}{M(1+kM^2)} dM$$

و باستخدام الكسور الجزئية للجانب الأيمن

$$= \frac{A}{M} + \frac{BM + c}{1+kM^2} \frac{2}{M(1+kM^2)}$$

$$2 = (Ak + B)M^2 + CM + A$$

$$\rightarrow A = 2, C = 0, B = -2k$$

$$\frac{2}{M(1+kM^2)} = \frac{2}{M} + \frac{2kM}{1+kM^2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2 \int_M^{1.0} \frac{dM}{M} = \ln(M^2) \Big|_M^1 - \ln M^2 =$$

$$I_2 = -2k \int_M^{1.0} \frac{M dM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{2M dM}{1+kM^2} = -k \int_M^{1.0} \frac{dM^2}{1+kM^2}$$

$$1 + kM^2 = u$$

$$du = k dM^2$$

$$I_2 = - \int \frac{du}{u} = - \ln u = - \ln (1+kM^2) \Big|_M^1 = \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$I = - \ln M^2 + \ln \frac{1+kM^2}{1+k}$$

$$\ln \frac{v^*}{v} = \ln \frac{1+kM^2}{1+k} - \ln M^2$$

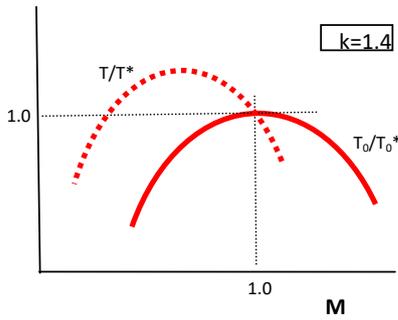
$$\frac{v^*}{v} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2}$$

$$\frac{v}{v^*} = \frac{(1+k)M^2}{1+kM^2} \dots\dots\dots(11.6.7)$$

و يمكن على هذا النسق مكاملة المعادلات التفاضلية (11.6.2) إلى (11.6.6) لتعطي:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2} \dots\dots\dots(11.6.8)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{k+1}{1+kM^2} \dots\dots\dots(11.6.9)$$



الشكل 11.6.2

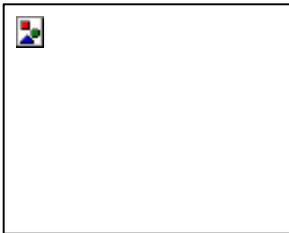
$$\frac{T}{T^*} = \frac{(k+1)^2 M^2}{(1+kM^2)^2} \dots\dots(11.6.10)$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(1+k)M^2 \mu}{(1+kM^2)^2} \dots\dots(11.6.11)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \left(\frac{2\mu}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \dots\dots(11.6.12)$$

يبين الشكل (11.6.2) صورة بيانية للمعادلتين (11.6.10) و (11.6.11). و يجد القارئ جداول سريان ريلي ضمن الملحق (هـ) لنسبة الحرارة النوعية 1.4.

11.6.4 معدل انتقال الحرارة



الشكل 11.6.3

معادلة الطاقة للمقطع 2-1 :

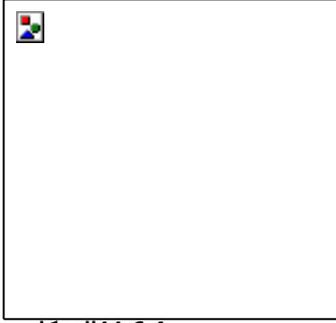
$$h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\dot{Q}}{m} = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$= h_{02} - h_{01} - \frac{\dot{Q}}{m}$$

$$\dot{Q} = c_p \dot{m} (T_{02} - T_{01}) \dots\dots\dots(11.6.13)$$

مثال 11.6.1

يسري هواء في أنبوب ضئيل الاحتكاك. الضغط ودرجة الحرارة و عدد ماخ عند المدخل 0.55MPa ، 230K و 0.5 ، على التوالي. يخرج الهواء من الأنبوب بدرجة الحرارة 280K .



الشكل 11.6.4

- (أ) أحسب عدد ماخ الخروجي
 (ب) أحسب التغير في الضغط الركودي
 (ج) إذا كان معدل السريان 1.0kg/s أحسب معدل انتقال الحرارة.

(أ)

$$\frac{T_2}{T^*} = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T^*}$$

س ر (1)

M	T/T*
0.5	0.790

$$T_2/T^* = 0.962$$

س ر (2)

T/T*	M
0.962	0.65

$$M_2 = 0.65$$

(ب)

س ل ت (1)

M	p/p ₀
0.5	0.843

$$p_{01} = 0.652E6 \text{ Pa}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_0^*} \frac{p_0^*}{p_{01}}$$

س ر (2)

M	P ₀ /p ₀ *
0.65	1.058

س ر (1)

M	P ₀ /p ₀ *
0.5	1.114

$$p_{02} = 0.619E6 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_0 = p_{02} - p_{01} = -32.8E3$$

الانخفاض في الضغط = 32.8kPa

(ج)

$$= c_p \dot{m} (T_{02} - T_{01}) \dot{Q}$$

$$c_p = kR/(k-1) = 1004.5 \text{ J/kg-K}$$

س ل ت (1)

M	T/T₀
0.5	0.9524

س ل ت (2)

M	T/T₀
0.65	0.9221

$$T_{02} = 303.7$$

$$T_{01} = 241.5$$

$$= 1.0 (1004.5)(303.7 - 241.5) = \mathbf{62.5kW} \dot{Q}$$

11.6.5 الشَّرَق



الشكل (11.6.5)

إضافة كمية حرارة للسريان تميزه زيادة في درجة الحرارة الركودية T_0 - المعادلة (11.6.13). و بالتالي، لاستنباط أثر انتقال الحرارة على السريان يمكن دراسة تأثير السريان بتغيير قيمة T_0 . الشكل (11.6.5) يوضح تغير درجة الحرارة الركودية اللابعدية بعدد ماخ في المدى دون الصوتي حسب المعادلة (11.6.11). و يدل المنحنى إلى أن تسخين السريان من الوضع الابتدائي ذي

$$\left(M_1, \frac{T_{01}}{T_0^*} \right) \text{ إلى الوضع النهائي } \left(M_2, \frac{T_{02}}{T_0^*} \right)$$

يعني زيادة في درجة الحرارة الركودية بالمقدار $T_{02} - T_{01}$. و يرتفع الموضع **2** بزيادة التسخين حتى يصل إلى الموضع **2***. إذا وولي التسخين بعد ذلك بغرض دفع الموضع **2** إلى أعلى من ذلك بحيث $T_{02} >$

T_0^* فان الأمر يصبح غير ممكن في الطبيعة لأن $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز الواحد الصحيح. الذي يحدث في الواقع

هو أن يتعدل كل السريان ليستوعب كمية الحرارة المضافة. و بالنظر إلى الشكل (11.6.5) نرى أن ذلك يحدث فقط بانخفاض M_1 لتزيد $T_{02} - T_{01}$ و يصبح السريان الخروجي صوتياً. و يسمى السريان في هذه الحالة شرفاً.

11.6.2 مثال

أنبوب ضئيل الاحتكاك و ذو مقطع ثابت. في البدء دُفع الهواء إلى داخل الأنبوب بعدد ماخ 0.5 و درجة حرارة ركودية 300K. ثم سُخن المجرى حتى ارتفعت درجة الحرارة الركودية إلى 1000K. ما هو أثر التسخين على عدد ماخ الدخولي؟

$$T_{02}/T_{01} = 1000/300 = 3.333$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_0}{T_0^*} \bigg|_2 \frac{T_0^*}{T_0} \bigg|_1 \dots\dots\dots(1)$$

إذا بقيت M_1 عند 0.5 بعد التسخين
س ر (1):

M	T_0/T_0^*
0.5	0.691

المعادلة (1) تعطي

$$= \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{T_0}{T_0^*} \Big|_1 = (3.333)(0.691) = 2.303 \frac{T_0}{T_0^*} \Big|_2$$

و هذا غير ممكن حيث $\frac{T_0}{T_0^*}$ لا تتجاوز 1.0 .

و هذا يعني أن السريان شرف.

$$M_2 = 1.0$$

المعادلة (1) تعطي

$$\frac{T_0}{T_0^*} \Big|_1 = \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{T_0}{T_0^*} \Big|_2 = 300/1000 = 0.3$$

س ر (1):

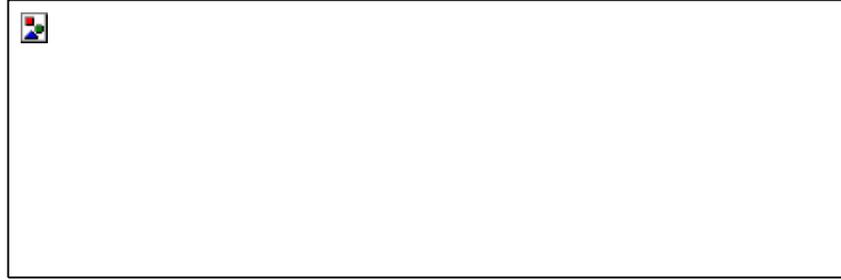
T_0/T_0^*	M
0.3	0.274

$$M_1 = \mathbf{0.274}$$

11.6.5 تطبيقات³

11.6.5.1 محرك النفث التضاعطي (ramjet)

تطبيق مباشر للأنموذج الرياضي الذي شُرح في هذا الباب. يتميز المحرك بالبساطة و يكفل كفاءة عالية للسرعات العالية. إلا أنه يحتاج لتعزيز من محركات صاروخية أو نفاثة لتصل بالمنظومة لسرعة ابتدائية مناسبة لبدء التشغيل. الشكل (11.6.6) يوضح التصميم الأساس لمحرك النفث التضاعطي.



الشكل 11.6.6

11.6.5.2 محرك النفث التضاعطي ذو الاحتراق فوق الصوتي

في هذا النوع من المحركات التضاعطية يكون السريان فوق صوتي في كل رحلته عبر المحرك و يشمل ذلك غرفة الاحتراق. يضاف الوقود إلى تيار الهواء فوق الصوتي ليتم الاحتراق في سريان فوق صوتي. و هذا ما يميز هذا المحرك عن المحرك التضاعطي العادي و المحرك النفاث المألوف. سُعي لهذا التطبيق نسبةً لعدم صلاحية المحرك التضاعطي التقليدي للوصول لسرعات فرط صوتية ($M > 5$) و بدأت التجارب على الطبيعة منذ 1965 إلا أنها لم تتجاوز بعد طور الدراسة و التطوير.

³ References:

1. Anderson, J D, Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill
2. <http://www.onera.fr/conferences/ramjet-scrumjet-pde/>

مسائل

11.6.1 يعرف الآتي عند مدخل أنبوب يحوي سريان لا احتكاكي:

M_1	T_1	P_1	A_1
0.4	300K	0.1MPa	0.001m ²

(أ) بالرجوع إلى جداول السريان اللاتبيدي أحسب درجة الحرارة الركودية T_{01} و الضغط الركودي p_{01} .

(ب) سخّن الأنبوب حتى بلغت درجة الحرارة $T_2 = 400K$. أحسب قيم المتغيرات الأخرى مستعيناً بقوائم السريان الحراري.

(ج) وبوسيلة أخرى، استخلص التعبير الرياضي الذي يربط المتغيرات T_1 و T_2 و M_1 و M_2 و من ثم أحسب M_2 . قارن بالإجابة في (ب).

(د) أحسب معدل انتقال الحرارة بالكيلووات.

[310K, 0.112MPa, 0.52, 18kW]

11.6.2 يسري الهواء في أنبوب لا احتكاكي مساحة مقطعه 0.01m². عند مدخل الأنبوب:

M	T_0	P_0
0.3	350K	0.2MPa

سخن الأنبوب و ارتفعت درجة الحرارة الركودية عند المخرج إلى 450K. أحسب معدل سريان الحرارة و عدد ماخ الخروجي و الضغط الخروجي.

[0.21MW, 0.35, 0.18MPa]

11.6.3 قُرْن مخرج منفث لام بأنبوب ثابت المقطع. مساحة مدخل المنفث 0.25m². مساحة مخرج المنفث و مقطع الأنبوب 0.2m². استخدمت المنظومة لتسريع هواء من الحال الدخولي الآتية:

M	T	P
0.3	300K	0.1MPa

يمكن اعتبار السريان في المنفث لاتبيدي و يمكن تجاهل الاحتكاك في الأنبوب.

قَدِّر عدد ماخ الخروجي و درجة الحرارة الخروجية إذا سخن الأنبوب بمعدل 1MW. [0.42, 327K].

11.7 قياس السرعة في السريان الإنضغاطي

11.7.1 السريان دون الصوتي

عند استخدام منظومة أنبوب الضغط الحركي و المانومتر لقياس السرعة للسريان اللانضغاطي - القسم (6.3.1.1) - استخدمت علاقة الطاقة المبسطة لربط السرعة بفرق الضغط لتعطي المعادلة

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} \dots\dots\dots(1)$$

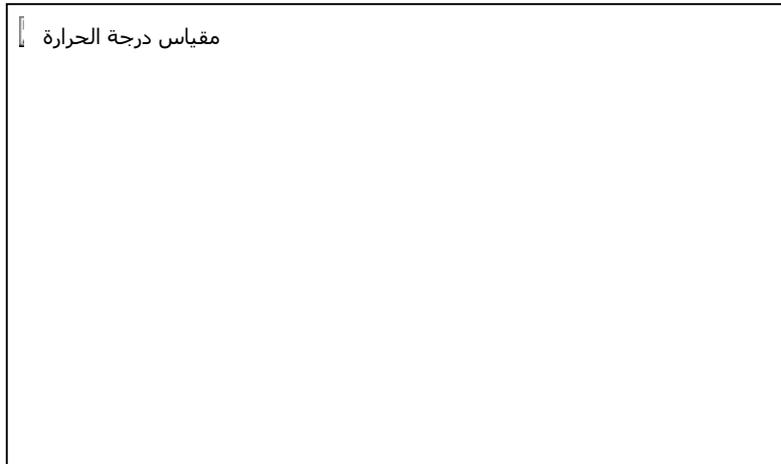
اعتبرت الكثافة في المعادلة (1) ثابت، و هذا تبسيط مخل إذا كان السريان انضغاطياً.

عند اعتبار السريان انضغاطي مع الإبقاء على افتراض اللاتبديد بين الموضع العام، حيث الضغط p و السرعة v و المحتوى الحراري h ، و موضع الركود ، حيث الضغط p_0 و السرعة صفر و المحتوى الحراري h_0 .

حفظ الطاقة بين الموضعين يعطي

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0$$

$$v = \sqrt{2(h_0 - h)} = \left[2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right]^{1/2}$$



الشكل 11.7.1

و للسريان اللاتبيدي

$$= \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{T}{T_0}$$

فتصبح السرعة

$$v = \left\{ \frac{2kRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(11.7.1)$$

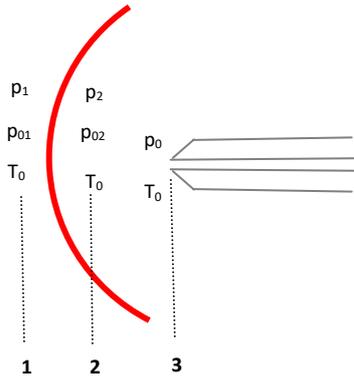
يلاحظ أن:

- أنبوبي الضغط و الضغط الركودي موصلين بمانومتريين منفصلين. بمعرفة الضغط الجوي يمكن استخلاص قيم p و p_0 .
- مقياس الحرارة يقرأ قيمة T_0 مباشرةً.

11.7.2 السريان فوق الصوتي

تدل التجربة على انه ليس بالإمكان إبطاء السريان فوق الصوتي إلى الحالة دون الصوتية دون عبور صدمة. و بذلك عند وضع أنبوب الضغط الحركي في سريان فوق صوتي فان السرعة تكون صفراً عند حافة الأنبوب و فوق صوتية على مبعدهً منه في الجانب الصعيدي. بين الموضعين يعبر السريان صدمة مائلة - الشكل (11.7.2).

بالنظر إلى السريان في خط الانسياب المحوري يمكن اعتبار الصدمة مستقيمة و متعامدة و الاستفادة من معادلات الصدمة المتعامدة في القسم (11.4).



الشكل 11.7.2

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \right) \dots\dots\dots(11.4.3)$$

و عند الموضع (2) تعطي معادلة السريان اللاتبيدي (11.3.4)

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}$$

و يمكن التعويض عن M_2 ب M_1 من المعادلة (11.4.4) لتعطي

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2kM_1^2 + 1 - k} \left(\frac{1}{2}M_1^2\right)^k \right]^{\frac{1}{k-1}} \dots\dots\dots(11.7.2)$$

يستخدم أنبوب الضغط الركودي لقياس $p_{02} - p_a$ و أنبوب الضغط لقياس $p_1 - p_a$ عند موضع صعيد المقطع (1). و يقاس الضغط الجوي p_a بالبارومتر . ثم تحل المعادلة (11.7.2) بطريقة تكررية لتعطي قيمة M_1 . لحساب السرعة v نحسب أولاً درجة الحرارة T_1 من المعادلة

$$\frac{T_1}{T_0} = [1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2]^{-1} \dots\dots\dots(11.3.3)$$

ثم تستخدم المعادلة

$$v_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} \dots\dots\dots(11.7.3)$$

مثال 11.7.1

تطير طائرة في جو ضغطه 0.1MPa . الطائرة مجهزة بأنبوب ضغط ركودي و مقياس للحرارة. يدل أنبوب الضغط الركودي على القراءة 0.14MPa فوق الضغط الجوي و يعطي مقياس الحرارة القراءة 440K . قَدّر سرعة الطائرة.

$$p = 0.1E6 \text{ Pa} , \quad p_0 = (0.14 + 0.1)E6 \text{ Pa} = 0.24 \text{ E6 Pa}$$

$$T_0 = 440K$$

نفترض في البدء أن السريان دون صوتي

$$p/p_0 = 0.1 / 0.24 = 0.417$$

قوائم السريان اللاتبيدي تعطي **$M = 1.19$**

مما يدل على أن السريان فوق صوتي

$$p_{02} = 0.24E6, \quad p_1 = 0.1E6$$

المعادلة (11.7.2)

$$M_1^{2.8} - 1.284M_1^2 + 0.183 = 0$$

$$\rightarrow M_1 = 1.2$$

قائمة السريان اللاتبيدي عند الموضع (1):

M	T/T ₀
1.2	0.7764

$$T_1 = 440 (0.7764) = 342K$$

$$v = M \sqrt{kRT} = 445m/s = 1600km/h.$$

الملحق أ

خواص الماء (عند ضغط جوي معياري):

اللزوجة الكينماتية [m ² /s]	الكثافة [kg/m ³]	درجة الحرارة [°C]
1.007E-6	998.2	20
0.897E-6	997.1	25
0.804E-6	995.7	30
0.727E-6	994.1	35
0.661E-6	992.2	40
0.605E-6	990.2	45
0.556E-6	988.1	50

خواص الضغط الجوي "القياسي":

p/p ₀	ρ/ρ ₀	درجة الحرارة K	الارتفاع m
1.000	1.000	288.2	0
0.9421	0.9529	284.9	500
0.8870	0.9075	281.7	1000
0.7846	0.8217	275.2	2000
0.6920	0.7423	268.7	3000
0.6085	0.6689	262.2	4000
0.5334	0.6012	255.7	5000

$$P_0 = 1.01325E5 \text{ Pa absolute}$$

$$\rho_0 = 1.2250 \text{ kg/m}^3$$

الملحق ب: علاقات رياضية ذات صلة

1 إذا كانت $f = f(x, y, z)$ فإن ممالي f هو المتجه:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k} \dots\dots\dots(1)$$

2 إذا كانت ϕ متجه ذا مركبات مطلقة ϕ_x و ϕ_y و ϕ_z في الاتجاهات x و y و z ، على التوالي ، فإن التباعد لـ ϕ

$$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \dots\dots\dots(2)$$

3 تربط نظرية التباعد التكامل الحجمي و التكامل السطحي بالعلاقة

$$\dots\dots\dots(3) \iiint_V (\nabla \cdot \phi) dV = \iint_A \phi \cdot d\underline{A}$$

4 من العلاقة (3)

$$\dots\dots\dots(4) \iiint_V (\nabla f) dV = \iint_A f \underline{n} dA$$

5 الحل العددي للمعادلة الجبرية

مثال: أحسب جذر للمعادلة أدناه بطريقة نيوتن- رافسون
 $x^{3.2} + 0.3x = 1.80$

$$f = x^{3.2} + 0.3x - 1.8$$

$$f' = 3.2x^{2.2} + 0.3$$

$$x_{i+1} = x_i - f/f'$$

$x = 1.00, 1.14, 1.13, \mathbf{1.13}$

الملحق ج: معامل الاحتكاك f للسريان في الأنابيب

Re	k/d	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
5.0E+3		0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.039	0.039
6.0E+3		0.036	0.036	0.036	0.036	0.037	0.037	0.037
7.0E+3		0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
8.0E+3		0.033	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
9.0E+3		0.032	0.032	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033
10.0E+3		0.031	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
20.0E+3		0.026	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028
30.0E+3		0.024	0.024	0.024	0.025	0.025	0.025	0.025
40.0E+3		0.022	0.023	0.023	0.023	0.024	0.024	0.024
50.0E+3		0.021	0.022	0.022	0.022	0.023	0.023	0.023
60.0E+3		0.020	0.021	0.021	0.022	0.022	0.022	0.023
70.0E+3		0.020	0.020	0.021	0.021	0.021	0.022	0.022
80.0E+3		0.019	0.020	0.020	0.021	0.021	0.021	0.022
90.0E+3		0.019	0.019	0.020	0.020	0.021	0.021	0.021
100.0E+3		0.018	0.019	0.019	0.020	0.020	0.021	0.021
200.0E+3		0.016	0.017	0.017	0.018	0.019	0.019	0.020
300.0E+3		0.015	0.016	0.017	0.017	0.018	0.019	0.019
400.0E+3		0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018	0.019
500.0E+3		0.013	0.015	0.016	0.017	0.017	0.018	0.019
600.0E+3		0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
700.0E+3		0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
800.0E+3		0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
900.0E+3		0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
1.0E+6		0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.018
2.0E+6		0.011	0.013	0.015	0.016	0.017	0.017	0.018
3.0E+6		0.010	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
4.0E+6		0.009	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
5.0E+6		0.009	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
6.0E+6		0.009	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
7.0E+6		0.009	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
8.0E+6		0.009	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
9.0E+6		0.008	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
10.0E+6		0.008	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
20.0E+6		0.007	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
30.0E+6		0.007	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018
40.0E+6		0.007	0.012	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018

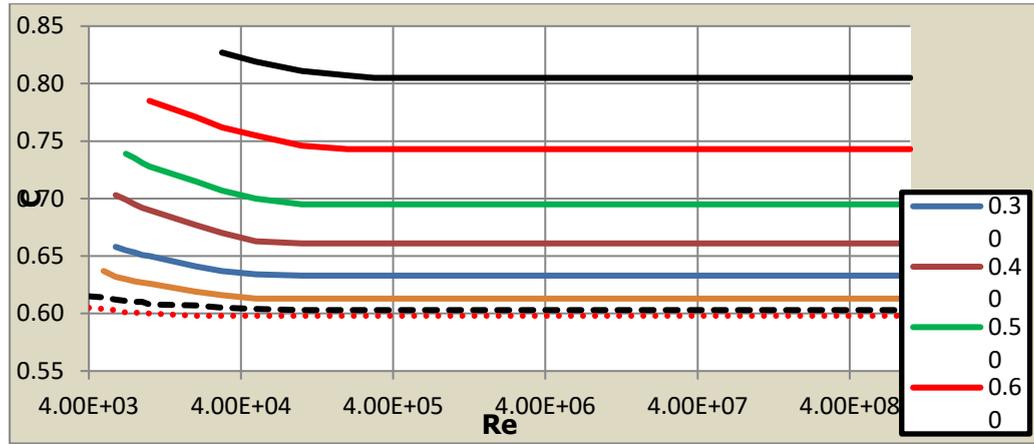
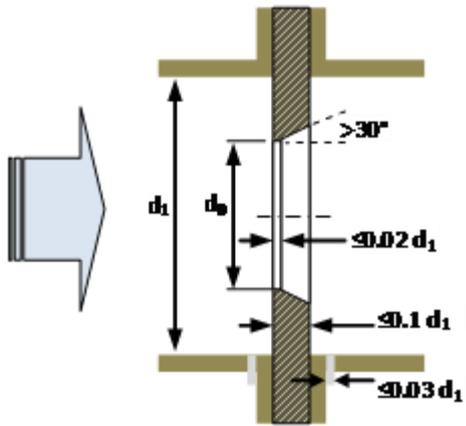
	k/d	0.0007	0.0009	0.0010	0.0020	0.0030	0.0040
Re							
5.0E+3		0.039	0.039	0.039	0.040	0.041	0.042
6.0E+3		0.037	0.037	0.037	0.039	0.040	0.041
7.0E+3		0.036	0.036	0.036	0.037	0.038	0.040
8.0E+3		0.034	0.035	0.035	0.036	0.037	0.039
9.0E+3		0.033	0.034	0.034	0.035	0.036	0.038
10.0E+3		0.032	0.033	0.033	0.034	0.036	0.037
20.0E+3		0.028	0.028	0.028	0.030	0.032	0.034
30.0E+3		0.026	0.026	0.026	0.029	0.031	0.032
40.0E+3		0.024	0.025	0.025	0.028	0.030	0.032
50.0E+3		0.024	0.024	0.024	0.027	0.029	0.031
60.0E+3		0.023	0.024	0.024	0.027	0.029	0.031
70.0E+3		0.022	0.023	0.023	0.026	0.029	0.031
80.0E+3		0.022	0.023	0.023	0.026	0.028	0.030
90.0E+3		0.022	0.022	0.023	0.026	0.028	0.030
100.0E+3		0.022	0.022	0.023	0.026	0.028	0.030
200.0E+3		0.020	0.021	0.021	0.025	0.027	0.030
300.0E+3		0.020	0.021	0.021	0.025	0.027	0.029
400.0E+3		0.019	0.020	0.021	0.024	0.027	0.029
500.0E+3		0.019	0.020	0.021	0.024	0.027	0.029
600.0E+3		0.019	0.020	0.021	0.024	0.027	0.029
700.0E+3		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
800.0E+3		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
900.0E+3		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
1.0E+6		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
2.0E+6		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
3.0E+6		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
4.0E+6		0.019	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
5.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
6.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
7.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
8.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
9.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
10.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
20.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
30.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029
40.0E+6		0.018	0.020	0.020	0.024	0.027	0.029

	k/d	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011
Re								
5.0E+3		0.043	0.044	0.045	0.046	0.047	0.048	0.049
6.0E+3		0.042	0.043	0.044	0.045	0.046	0.047	0.048
7.0E+3		0.041	0.042	0.043	0.044	0.045	0.046	0.047
8.0E+3		0.040	0.041	0.042	0.043	0.044	0.045	0.046
9.0E+3		0.039	0.040	0.041	0.042	0.043	0.044	0.045
10.0E+3		0.038	0.040	0.041	0.042	0.043	0.044	0.045
20.0E+3		0.035	0.037	0.038	0.039	0.040	0.041	0.043
30.0E+3		0.034	0.035	0.037	0.038	0.039	0.041	0.042
40.0E+3		0.033	0.035	0.036	0.038	0.039	0.040	0.041
50.0E+3		0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040	0.041
60.0E+3		0.033	0.034	0.036	0.037	0.038	0.040	0.041
70.0E+3		0.032	0.034	0.035	0.037	0.038	0.040	0.041
80.0E+3		0.032	0.034	0.035	0.037	0.038	0.039	0.041
90.0E+3		0.032	0.034	0.035	0.037	0.038	0.039	0.041
100.0E+3		0.032	0.034	0.035	0.037	0.038	0.039	0.041
200.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.038	0.039	0.040
300.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.038	0.039	0.040
400.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.037	0.039	0.040
500.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.037	0.039	0.040
600.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.037	0.039	0.040
700.0E+3		0.031	0.033	0.035	0.036	0.037	0.039	0.040
800.0E+3		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
900.0E+3		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
1.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
2.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
3.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
4.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
5.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
6.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
7.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
8.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
9.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
10.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
20.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
30.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040
40.0E+6		0.031	0.033	0.034	0.036	0.037	0.039	0.040

	k/d	0.012	0.013	0.014
Re				
5.0E+3		0.050	0.051	0.052
6.0E+3		0.049	0.050	0.050
7.0E+3		0.048	0.049	0.050
8.0E+3		0.047	0.048	0.049
9.0E+3		0.046	0.047	0.048
10.0E+3		0.046	0.047	0.048
20.0E+3		0.044	0.045	0.046
30.0E+3		0.043	0.044	0.045
40.0E+3		0.042	0.044	0.045
50.0E+3		0.042	0.043	0.044
60.0E+3		0.042	0.043	0.044
70.0E+3		0.042	0.043	0.044
80.0E+3		0.042	0.043	0.044
90.0E+3		0.042	0.043	0.044
100.0E+3		0.042	0.043	0.044
200.0E+3		0.041	0.043	0.044
300.0E+3		0.041	0.043	0.044
400.0E+3		0.041	0.042	0.044
500.0E+3		0.041	0.042	0.044
600.0E+3		0.041	0.042	0.044
700.0E+3		0.041	0.042	0.044
800.0E+3		0.041	0.042	0.044
900.0E+3		0.041	0.042	0.044
1.0E+6		0.041	0.042	0.044
2.0E+6		0.041	0.042	0.043
3.0E+6		0.041	0.042	0.043
4.0E+6		0.041	0.042	0.043
5.0E+6		0.041	0.042	0.043
6.0E+6		0.041	0.042	0.043
7.0E+6		0.041	0.042	0.043
8.0E+6		0.041	0.042	0.043
9.0E+6		0.041	0.042	0.043
10.0E+6		0.041	0.042	0.043
20.0E+6		0.041	0.042	0.043
30.0E+6		0.041	0.042	0.043
40.0E+6		0.041	0.042	0.043

الملحق د : المعامل C للمقياس الفوهي

A0/A1 ↓	Re →	4E+03	5E+03	6E+03	7E+03	8E+03	9E+03	1E+04	2E+04	3E+04	5E+04	1E+05	2E+05	3E+05	1E+09
	0.70										0.827	0.819	0.811	0.807	0.805
0.60								0.785	0.771	0.762	0.755	0.746	0.743	0.743	0.743
0.50					0.739	0.735	0.731	0.728	0.715	0.707	0.700	0.695	0.695	0.695	0.695
0.40				0.703	0.699	0.695	0.692	0.690	0.677	0.670	0.663	0.661	0.661	0.661	0.661
0.30				0.658	0.655	0.653	0.651	0.650	0.641	0.637	0.634	0.633	0.633	0.633	0.633
0.20			0.637	0.632	0.630	0.628	0.627	0.626	0.619	0.616	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613
0.10		0.615	0.614	0.612	0.611	0.610	0.610	0.608	0.607	0.605	0.604	0.603	0.603	0.603	0.603
0.05		0.605	0.604	0.603	0.601	0.601	0.600	0.600	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598



الملحق هـ:

قوائم السريران الانضغاطي
($k = 1.4$)

M	A/A*	p/p ₀	T/T ₀	A.p/A*.p ₀	M	A/A*	p/p ₀	T/T ₀	A.p/A*.p ₀
0.02	28.9421	0.9997	0.9999	28.9340	1.02	1.0003	0.5160	0.8278	0.5162
0.04	14.4815	0.9989	0.9997	14.4653	1.04	1.0013	0.5039	0.8222	0.5045
0.06	9.6659	0.9975	0.9993	9.6416	1.06	1.0029	0.4919	0.8165	0.4933
0.08	7.2616	0.9955	0.9987	7.2292	1.08	1.0051	0.4800	0.8108	0.4825
0.10	5.8218	0.9930	0.9980	5.7813	1.10	1.0079	0.4684	0.8052	0.4721
0.12	4.8643	0.9900	0.9971	4.8156	1.12	1.0113	0.4568	0.7994	0.4620
0.14	4.1824	0.9864	0.9961	4.1255	1.14	1.0153	0.4455	0.7937	0.4523
0.16	3.6727	0.9823	0.9949	3.6077	1.16	1.0198	0.4343	0.7879	0.4428
0.18	3.2779	0.9776	0.9936	3.2047	1.18	1.0248	0.4232	0.7822	0.4337
0.20	2.9635	0.9725	0.9921	2.8820	1.20	1.0304	0.4124	0.7764	0.4249
0.22	2.7076	0.9668	0.9904	2.6178	1.22	1.0366	0.4017	0.7706	0.4164
0.24	2.4956	0.9607	0.9886	2.3975	1.24	1.0432	0.3912	0.7648	0.4081
0.26	2.3173	0.9541	0.9867	2.2109	1.26	1.0504	0.3809	0.7590	0.4001
0.28	2.1656	0.9470	0.9846	2.0508	1.28	1.0581	0.3708	0.7532	0.3924
0.30	2.0351	0.9395	0.9823	1.9119	1.30	1.0663	0.3609	0.7474	0.3848
0.32	1.9219	0.9315	0.9799	1.7902	1.32	1.0750	0.3512	0.7416	0.3775
0.34	1.8229	0.9231	0.9774	1.6827	1.34	1.0842	0.3417	0.7358	0.3704
0.36	1.7358	0.9143	0.9747	1.5871	1.36	1.0940	0.3323	0.7300	0.3636
0.38	1.6587	0.9052	0.9719	1.5014	1.38	1.1042	0.3232	0.7242	0.3569
0.40	1.5901	0.8956	0.9690	1.4242	1.40	1.1149	0.3142	0.7184	0.3504
0.42	1.5289	0.8857	0.9659	1.3542	1.42	1.1262	0.3055	0.7126	0.3440
0.44	1.4740	0.8755	0.9627	1.2905	1.44	1.1379	0.2969	0.7069	0.3379
0.46	1.4246	0.8650	0.9594	1.2322	1.46	1.1501	0.2886	0.7011	0.3319
0.48	1.3801	0.8541	0.9559	1.1788	1.48	1.1629	0.2804	0.6954	0.3261
0.50	1.3398	0.8430	0.9524	1.1295	1.50	1.1762	0.2724	0.6897	0.3204
0.52	1.3034	0.8317	0.9487	1.0840	1.52	1.1899	0.2646	0.6840	0.3149
0.54	1.2703	0.8201	0.9449	1.0417	1.54	1.2042	0.2570	0.6783	0.3095
0.56	1.2403	0.8082	0.9410	1.0024	1.56	1.2190	0.2496	0.6726	0.3042
0.58	1.2130	0.7962	0.9370	0.9658	1.58	1.2344	0.2423	0.6670	0.2991
0.60	1.1882	0.7840	0.9328	0.9316	1.60	1.2502	0.2353	0.6614	0.2941
0.62	1.1656	0.7716	0.9286	0.8995	1.62	1.2666	0.2284	0.6558	0.2893
0.64	1.1451	0.7591	0.9243	0.8693	1.64	1.2836	0.2217	0.6502	0.2845
0.66	1.1265	0.7465	0.9199	0.8410	1.66	1.3010	0.2152	0.6447	0.2799
0.68	1.1097	0.7338	0.9153	0.8142	1.68	1.3190	0.2088	0.6392	0.2754
0.70	1.0944	0.7209	0.9107	0.7890	1.70	1.3376	0.2026	0.6337	0.2710
0.72	1.0806	0.7080	0.9061	0.7651	1.72	1.3567	0.1966	0.6283	0.2667
0.74	1.0681	0.6951	0.9013	0.7424	1.74	1.3764	0.1907	0.6229	0.2625
0.76	1.0570	0.6821	0.8964	0.7209	1.76	1.3967	0.1850	0.6175	0.2584
0.78	1.0471	0.6691	0.8915	0.7005	1.78	1.4175	0.1794	0.6121	0.2544
0.80	1.0382	0.6560	0.8865	0.6811	1.80	1.4390	0.1740	0.6068	0.2504
0.82	1.0305	0.6430	0.8815	0.6626	1.82	1.4610	0.1688	0.6015	0.2466
0.84	1.0237	0.6300	0.8763	0.6449	1.84	1.4836	0.1637	0.5963	0.2429
0.86	1.0179	0.6170	0.8711	0.6281	1.86	1.5069	0.1587	0.5910	0.2392
0.88	1.0129	0.6041	0.8659	0.6119	1.88	1.5308	0.1539	0.5859	0.2356
0.90	1.0089	0.5913	0.8606	0.5965	1.90	1.5553	0.1492	0.5807	0.2321
0.92	1.0056	0.5785	0.8552	0.5817	1.92	1.5804	0.1447	0.5756	0.2287
0.94	1.0031	0.5658	0.8498	0.5675	1.94	1.6062	0.1403	0.5705	0.2253
0.96	1.0014	0.5532	0.8444	0.5539	1.96	1.6326	0.1360	0.5655	0.2220
0.98	1.0003	0.5407	0.8389	0.5409	1.98	1.6597	0.1318	0.5605	0.2188
1.00	1.0000	0.5283	0.8333	0.5283	2.00	1.6875	0.1278	0.5556	0.2157

M	A/A*	p/p ₀	T/T ₀	A.p/A*.p ₀	M	A/A*	p/p ₀	T/T ₀	A.p/A*.p ₀
2.02	1.7160	0.1239	0.5506	0.2126	3.02	4.3160	0.0264	0.3541	0.1140
2.04	1.7451	0.1201	0.5458	0.2096	3.04	4.3989	0.0256	0.3511	0.1128
2.06	1.7750	0.1164	0.5409	0.2066	3.06	4.4835	0.0249	0.3481	0.1116
2.08	1.8056	0.1128	0.5361	0.2037	3.08	4.5696	0.0242	0.3452	0.1104
2.10	1.8369	0.1094	0.5313	0.2009	3.10	4.6573	0.0234	0.3422	0.1092
2.12	1.8690	0.1060	0.5266	0.1981	3.12	4.7467	0.0228	0.3393	0.1080
2.14	1.9018	0.1027	0.5219	0.1954	3.14	4.8377	0.0221	0.3365	0.1069
2.16	1.9354	0.0996	0.5173	0.1927	3.16	4.9304	0.0215	0.3337	0.1058
2.18	1.9698	0.0965	0.5127	0.1901	3.18	5.0248	0.0208	0.3309	0.1047
2.20	2.0050	0.0935	0.5081	0.1875	3.20	5.1209	0.0202	0.3281	0.1036
2.22	2.0409	0.0906	0.5036	0.1850	3.22	5.2189	0.0196	0.3253	0.1025
2.24	2.0777	0.0878	0.4991	0.1825	3.24	5.3186	0.0191	0.3226	0.1015
2.26	2.1153	0.0851	0.4947	0.1801	3.26	5.4201	0.0185	0.3199	0.1004
2.28	2.1538	0.0825	0.4903	0.1777	3.28	5.5234	0.0180	0.3173	0.0994
2.30	2.1931	0.0800	0.4859	0.1754	3.30	5.6286	0.0175	0.3147	0.0984
2.32	2.2333	0.0775	0.4816	0.1731	3.32	5.7357	0.0170	0.3121	0.0974
2.34	2.2744	0.0751	0.4773	0.1709	3.34	5.8448	0.0165	0.3095	0.0964
2.36	2.3164	0.0728	0.4731	0.1687	3.36	5.9558	0.0160	0.3069	0.0954
2.38	2.3593	0.0706	0.4688	0.1665	3.38	6.0687	0.0156	0.3044	0.0945
2.40	2.4031	0.0684	0.4647	0.1644	3.40	6.1837	0.0151	0.3019	0.0935
2.42	2.4479	0.0663	0.4606	0.1623	3.42	6.3007	0.0147	0.2995	0.0926
2.44	2.4936	0.0643	0.4565	0.1602	3.44	6.4197	0.0143	0.2970	0.0917
2.46	2.5403	0.0623	0.4524	0.1582	3.46	6.5409	0.0139	0.2946	0.0908
2.48	2.5880	0.0604	0.4484	0.1563	3.48	6.6642	0.0135	0.2922	0.0899
2.50	2.6367	0.0585	0.4444	0.1543	3.50	6.7896	0.0131	0.2899	0.0890
2.52	2.6864	0.0567	0.4405	0.1524	3.52	6.9172	0.0127	0.2875	0.0882
2.54	2.7372	0.0550	0.4366	0.1505	3.54	7.0470	0.0124	0.2852	0.0873
2.56	2.7891	0.0533	0.4328	0.1487	3.56	7.1791	0.0120	0.2829	0.0865
2.58	2.8420	0.0517	0.4289	0.1469	3.58	7.3134	0.0117	0.2806	0.0856
2.60	2.8960	0.0501	0.4252	0.1451	3.60	7.4501	0.0114	0.2784	0.0848
2.62	2.9511	0.0486	0.4214	0.1434	3.62	7.5891	0.0111	0.2762	0.0840
2.64	3.0073	0.0471	0.4177	0.1417	3.64	7.7304	0.0108	0.2740	0.0832
2.66	3.0647	0.0457	0.4141	0.1400	3.66	7.8742	0.0105	0.2718	0.0824
2.68	3.1233	0.0443	0.4104	0.1383	3.68	8.0204	0.0102	0.2697	0.0817
2.70	3.1830	0.0430	0.4068	0.1367	3.70	8.1690	0.0099	0.2675	0.0809
2.72	3.2439	0.0417	0.4033	0.1351	3.72	8.3202	0.0096	0.2654	0.0801
2.74	3.3061	0.0404	0.3998	0.1335	3.74	8.4739	0.0094	0.2633	0.0794
2.76	3.3695	0.0392	0.3963	0.1320	3.76	8.6302	0.0091	0.2613	0.0787
2.78	3.4342	0.0380	0.3928	0.1305	3.78	8.7891	0.0089	0.2592	0.0779
2.80	3.5001	0.0368	0.3894	0.1290	3.80	8.9506	0.0086	0.2572	0.0772
2.82	3.5674	0.0357	0.3860	0.1275	3.82	9.1147	0.0084	0.2552	0.0765
2.84	3.6359	0.0347	0.3827	0.1261	3.84	9.2816	0.0082	0.2532	0.0758
2.86	3.7058	0.0336	0.3794	0.1246	3.86	9.4513	0.0080	0.2513	0.0752
2.88	3.7771	0.0326	0.3761	0.1232	3.88	9.6237	0.0077	0.2493	0.0745
2.90	3.8498	0.0317	0.3729	0.1219	3.90	9.7989	0.0075	0.2474	0.0738
2.92	3.9238	0.0307	0.3696	0.1205	3.92	9.9770	0.0073	0.2455	0.0731
2.94	3.9993	0.0298	0.3665	0.1192	3.94	10.1580	0.0071	0.2436	0.0725
2.96	4.0762	0.0289	0.3633	0.1178	3.96	10.3419	0.0069	0.2418	0.0719
2.98	4.1547	0.0281	0.3602	0.1166	3.98	10.5288	0.0068	0.2399	0.0712
3.00	4.2346	0.0272	0.3571	0.1153	4.00	10.7187	0.0066	0.2381	0.0706

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}
1.02	0.981	1.0471	1.0132	1.0000	2.02	0.574	4.5938	1.7038	0.7115
1.04	0.962	1.0952	1.0263	0.9999	2.04	0.571	4.6885	1.7203	0.7022
1.06	0.944	1.1442	1.0393	0.9998	2.06	0.567	4.7842	1.7369	0.6928
1.08	0.928	1.1941	1.0522	0.9994	2.08	0.564	4.8808	1.7536	0.6835
1.10	0.912	1.2450	1.0649	0.9989	2.10	0.561	4.9783	1.7704	0.6742
1.12	0.897	1.2968	1.0776	0.9982	2.12	0.558	5.0768	1.7875	0.6649
1.14	0.882	1.3495	1.0903	0.9973	2.14	0.555	5.1762	1.8046	0.6557
1.16	0.868	1.4032	1.1029	0.9961	2.16	0.553	5.2765	1.8219	0.6464
1.18	0.855	1.4578	1.1154	0.9946	2.18	0.550	5.3778	1.8393	0.6373
1.20	0.842	1.5133	1.1280	0.9928	2.20	0.547	5.4800	1.8569	0.6281
1.22	0.830	1.5698	1.1405	0.9907	2.22	0.544	5.5831	1.8746	0.6191
1.24	0.818	1.6272	1.1531	0.9884	2.24	0.542	5.6872	1.8924	0.6100
1.26	0.807	1.6855	1.1657	0.9857	2.26	0.539	5.7922	1.9104	0.6011
1.28	0.796	1.7448	1.1783	0.9827	2.28	0.537	5.8981	1.9285	0.5921
1.30	0.786	1.8050	1.1909	0.9794	2.30	0.534	6.0050	1.9468	0.5833
1.32	0.776	1.8661	1.2035	0.9758	2.32	0.532	6.1128	1.9652	0.5745
1.34	0.766	1.9282	1.2162	0.9718	2.34	0.530	6.2215	1.9838	0.5658
1.36	0.757	1.9912	1.2290	0.9676	2.36	0.527	6.3312	2.0025	0.5572
1.38	0.748	2.0551	1.2418	0.9630	2.38	0.525	6.4418	2.0213	0.5486
1.40	0.740	2.1200	1.2547	0.9582	2.40	0.523	6.5533	2.0403	0.5401
1.42	0.731	2.1858	1.2676	0.9531	2.42	0.521	6.6658	2.0595	0.5317
1.44	0.723	2.2525	1.2807	0.9476	2.44	0.519	6.7792	2.0788	0.5234
1.46	0.716	2.3202	1.2938	0.9420	2.46	0.517	6.8935	2.0982	0.5152
1.48	0.708	2.3888	1.3069	0.9360	2.48	0.515	7.0088	2.1178	0.5071
1.50	0.701	2.4583	1.3202	0.9298	2.50	0.513	7.1250	2.1375	0.4990
1.52	0.694	2.5288	1.3336	0.9233	2.52	0.511	7.2421	2.1574	0.4911
1.54	0.687	2.6002	1.3470	0.9166	2.54	0.509	7.3602	2.1774	0.4832
1.56	0.681	2.6725	1.3606	0.9097	2.56	0.507	7.4792	2.1976	0.4754
1.58	0.675	2.7458	1.3742	0.9026	2.58	0.506	7.5991	2.2179	0.4677
1.60	0.668	2.8200	1.3880	0.8952	2.60	0.504	7.7200	2.2383	0.4601
1.62	0.663	2.8951	1.4018	0.8877	2.62	0.502	7.8418	2.2590	0.4526
1.64	0.657	2.9712	1.4158	0.8799	2.64	0.500	7.9645	2.2797	0.4452
1.66	0.651	3.0482	1.4299	0.8720	2.66	0.499	8.0882	2.3006	0.4379
1.68	0.646	3.1261	1.4440	0.8639	2.68	0.497	8.2128	2.3217	0.4307
1.70	0.641	3.2050	1.4583	0.8557	2.70	0.496	8.3383	2.3429	0.4236
1.72	0.635	3.2848	1.4727	0.8474	2.72	0.494	8.4648	2.3642	0.4166
1.74	0.631	3.3655	1.4873	0.8389	2.74	0.493	8.5922	2.3858	0.4097
1.76	0.626	3.4472	1.5019	0.8302	2.76	0.491	8.7205	2.4074	0.4028
1.78	0.621	3.5298	1.5167	0.8215	2.78	0.490	8.8498	2.4292	0.3961
1.80	0.617	3.6133	1.5316	0.8127	2.80	0.488	8.9800	2.4512	0.3895
1.82	0.612	3.6978	1.5466	0.8038	2.82	0.487	9.1111	2.4733	0.3829
1.84	0.608	3.7832	1.5617	0.7948	2.84	0.485	9.2432	2.4955	0.3765
1.86	0.604	3.8695	1.5770	0.7857	2.86	0.484	9.3762	2.5179	0.3701
1.88	0.600	3.9568	1.5924	0.7765	2.88	0.483	9.5101	2.5405	0.3639
1.90	0.596	4.0450	1.6079	0.7674	2.90	0.481	9.6450	2.5632	0.3577
1.92	0.592	4.1341	1.6236	0.7581	2.92	0.480	9.7808	2.5861	0.3517
1.94	0.588	4.2242	1.6394	0.7488	2.94	0.479	9.9175	2.6091	0.3457
1.96	0.584	4.3152	1.6553	0.7395	2.96	0.478	10.0552	2.6322	0.3398
1.98	0.581	4.4071	1.6713	0.7302	2.98	0.476	10.1938	2.6555	0.3340
2.00	0.577	4.5000	1.6875	0.7209	3.00	0.475	10.3333	2.6790	0.3283

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}
3.02	0.474	10.4738	2.7026	0.3227
3.04	0.473	10.6152	2.7264	0.3172
3.06	0.472	10.7575	2.7503	0.3118
3.08	0.471	10.9008	2.7744	0.3065
3.10	0.470	11.0450	2.7986	0.3012
3.12	0.468	11.1901	2.8230	0.2960
3.14	0.467	11.3362	2.8475	0.2910
3.16	0.466	11.4832	2.8722	0.2860
3.18	0.465	11.6311	2.8970	0.2811
3.20	0.464	11.7800	2.9220	0.2762
3.22	0.463	11.9298	2.9471	0.2715
3.24	0.462	12.0805	2.9724	0.2668
3.26	0.461	12.2322	2.9979	0.2622
3.28	0.461	12.3848	3.0234	0.2577
3.30	0.460	12.5383	3.0492	0.2533

3.32	0.459	12.6928	3.0751	0.2489
3.34	0.458	12.8482	3.1011	0.2446
3.36	0.457	13.0045	3.1273	0.2404
3.38	0.456	13.1618	3.1537	0.2363
3.40	0.455	13.3200	3.1802	0.2322
3.42	0.454	13.4791	3.2069	0.2282
3.44	0.454	13.6392	3.2337	0.2243
3.46	0.453	13.8002	3.2607	0.2205
3.48	0.452	13.9621	3.2878	0.2167
3.50	0.451	14.1250	3.3150	0.2129
3.52	0.450	14.2888	3.3425	0.2093
3.54	0.450	14.4535	3.3701	0.2057
3.56	0.449	14.6192	3.3978	0.2022
3.58	0.448	14.7858	3.4257	0.1987
3.60	0.447	14.9533	3.4537	0.1953
3.62	0.447	15.1218	3.4819	0.1920
3.64	0.446	15.2912	3.5103	0.1887
3.66	0.445	15.4615	3.5388	0.1855
3.68	0.445	15.6328	3.5674	0.1823
3.70	0.444	15.8050	3.5962	0.1792
3.72	0.443	15.9781	3.6252	0.1761
3.74	0.443	16.1522	3.6543	0.1731
3.76	0.442	16.3272	3.6836	0.1702
3.78	0.441	16.5031	3.7130	0.1673
3.80	0.441	16.6800	3.7426	0.1645
3.82	0.440	16.8578	3.7723	0.1617
3.84	0.440	17.0365	3.8022	0.1589
3.86	0.439	17.2162	3.8323	0.1563
3.88	0.438	17.3968	3.8625	0.1536
3.90	0.438	17.5783	3.8928	0.1510
3.92	0.437	17.7608	3.9233	0.1485
3.94	0.437	17.9442	3.9540	0.1460
3.96	0.436	18.1285	3.9848	0.1435
3.98	0.436	18.3138	4.0158	0.1411
4.00	0.435	18.5000	4.0469	0.1388

M	T/T*	p/p*	p_o/p_o*	φ*
0.02	1.1999	54.7701	28.9421	1778.450
0.04	1.1996	27.3817	14.4815	440.3522
0.06	1.1991	18.2509	9.6659	193.0311
0.08	1.1985	13.6843	7.2616	106.7182
0.10	1.1976	10.9435	5.8218	66.9216
0.12	1.1966	9.1156	4.8643	45.4080
0.14	1.1953	7.8093	4.1824	32.5113
0.16	1.1939	6.8291	3.6727	24.1978
0.18	1.1923	6.0662	3.2779	18.5427
0.20	1.1905	5.4554	2.9635	14.5333
0.22	1.1885	4.9554	2.7076	11.5961
0.24	1.1863	4.5383	2.4956	9.3865
0.26	1.1840	4.1851	2.3173	7.6876
0.28	1.1815	3.8820	2.1656	6.3572
0.30	1.1788	3.6191	2.0351	5.2993
0.32	1.1759	3.3887	1.9219	4.4467
0.34	1.1729	3.1853	1.8229	3.7520
0.36	1.1697	3.0042	1.7358	3.1801
0.38	1.1663	2.8420	1.6587	2.7054
0.40	1.1628	2.6958	1.5901	2.3085
0.42	1.1591	2.5634	1.5289	1.9744
0.44	1.1553	2.4428	1.4740	1.6915
0.46	1.1513	2.3326	1.4246	1.4509
0.48	1.1471	2.2313	1.3801	1.2453
0.50	1.1429	2.1381	1.3398	1.0691
0.52	1.1384	2.0519	1.3034	0.9174
0.54	1.1339	1.9719	1.2703	0.7866
0.56	1.1292	1.8975	1.2403	0.6736
0.58	1.1244	1.8282	1.2130	0.5757
0.60	1.1194	1.7634	1.1882	0.4908
0.62	1.1143	1.7026	1.1656	0.4172
0.64	1.1091	1.6456	1.1451	0.3533
0.66	1.1038	1.5919	1.1265	0.2979
0.68	1.0984	1.5413	1.1097	0.2498
0.70	1.0929	1.4935	1.0944	0.2081
0.72	1.0873	1.4482	1.0806	0.1721
0.74	1.0815	1.4054	1.0681	0.1411
0.76	1.0757	1.3647	1.0570	0.1145
0.78	1.0698	1.3261	1.0471	0.0917
0.80	1.0638	1.2893	1.0382	0.0723
0.82	1.0578	1.2542	1.0305	0.0559
0.84	1.0516	1.2208	1.0237	0.0423
0.86	1.0454	1.1889	1.0179	0.0310
0.88	1.0391	1.1583	1.0129	0.0218
0.90	1.0327	1.1291	1.0089	0.0145
0.92	1.0263	1.1011	1.0056	0.0089
0.94	1.0198	1.0743	1.0031	0.0048
0.96	1.0132	1.0485	1.0014	0.0021
0.98	1.0066	1.0238	1.0003	0.0005
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000

M	To/To*	T/T*	p/p*	po/po*
0.02	0.0019	0.0023	2.3987	1.2675
0.04	0.0076	0.0092	2.3946	1.2665
0.06	0.0171	0.0205	2.3880	1.2647
0.08	0.0302	0.0362	2.3787	1.2623
0.10	0.0468	0.0560	2.3669	1.2591
0.12	0.0666	0.0797	2.3526	1.2554
0.14	0.0895	0.1069	2.3359	1.2510
0.16	0.1151	0.1374	2.3170	1.2461
0.18	0.1432	0.1708	2.2959	1.2406
0.20	0.1736	0.2066	2.2727	1.2346
0.22	0.2057	0.2445	2.2477	1.2281
0.24	0.2395	0.2841	2.2209	1.2213
0.26	0.2745	0.3250	2.1925	1.2140
0.28	0.3104	0.3667	2.1626	1.2064
0.30	0.3469	0.4089	2.1314	1.1985
0.32	0.3837	0.4512	2.0991	1.1904
0.34	0.4206	0.4933	2.0657	1.1822
0.36	0.4572	0.5348	2.0314	1.1737
0.38	0.4935	0.5755	1.9964	1.1652
0.40	0.5290	0.6151	1.9608	1.1566
0.42	0.5638	0.6535	1.9247	1.1480
0.44	0.5975	0.6903	1.8882	1.1394
0.46	0.6301	0.7254	1.8515	1.1308
0.48	0.6614	0.7587	1.8147	1.1224
0.50	0.6914	0.7901	1.7778	1.1141
0.52	0.7199	0.8196	1.7409	1.1059
0.54	0.7470	0.8469	1.7043	1.0979
0.56	0.7725	0.8723	1.6678	1.0901
0.58	0.7965	0.8955	1.6316	1.0826
0.60	0.8189	0.9167	1.5957	1.0753
0.62	0.8398	0.9358	1.5603	1.0682
0.64	0.8592	0.9530	1.5253	1.0615
0.66	0.8771	0.9682	1.4908	1.0550
0.68	0.8935	0.9814	1.4569	1.0489
0.70	0.9085	0.9929	1.4235	1.0431
0.72	0.9221	1.0026	1.3907	1.0376
0.74	0.9344	1.0106	1.3585	1.0325
0.76	0.9455	1.0171	1.3270	1.0278
0.78	0.9553	1.0220	1.2961	1.0234
0.80	0.9639	1.0255	1.2658	1.0193
0.82	0.9715	1.0276	1.2362	1.0157
0.84	0.9781	1.0285	1.2073	1.0124
0.86	0.9836	1.0283	1.1791	1.0095
0.88	0.9883	1.0269	1.1515	1.0070
0.90	0.9921	1.0245	1.1246	1.0049
0.92	0.9951	1.0212	1.0984	1.0031
0.94	0.9973	1.0170	1.0728	1.0017
0.96	0.9988	1.0121	1.0479	1.0008
0.98	0.9997	1.0064	1.0236	1.0002
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الرموز

المساحة	A
سرعة الصوت	c
معامل الفقد الموضعي	C_a
معامل الإعاقة	C_D
معامل الإعاقة الجلدية	C_f
معامل الرفع	C_L
الحرارة النوعية عند ثبوت الضغط	C_p
الحرارة النوعية عند ثبوت الحجم	C_v
الإعاقة	D
قطر سرياني	D
قطر	d
الطاقة الداخلية	e
معامل الاحتكاك في الأنابيب	f
عدد فرود	Fr
تسارع الجاذبية	g
سمت	H, h
متوسط ارتفاع الخشونة	k
نسبة الحرارة النوعية	k
طول	L
مسافة خطية	l
طول الطبقة الجدارية الصفائحية	L_L
طول الطبقة الجدارية المائية	L_T
الكتلة	m
معدل سريان الكتلة	\dot{m}
عدد ماخ	M
الكتلة النسبية	M_r
اللفات في الثانية	n
اللفات في الدقيقة	N
الضغط	p
القدرة	P
معدل السريان الحجمي	q
معدل انتقال الحرارة	\dot{Q}
ثابت الغاز	R
رد الفعل	R
عدد رينولز	Re
الكثافة النسبية	s
جدة المور	T
درجة الحرارة	T
وقت	t
سرعة	U
xمركبة السرعة في الاتجاه	u
محصلة السرعة	\mathbf{v}
yمركبة السرعة في الاتجاه	v
الحجم	V
جمل	W
zمركبة السرعة في الاتجاه	w
الوزن	Wt
الارتفاع الرأسي	z

زاوية الهجوم، زاوية ماخ	α
سمك الطبقة الجدارية	δ
مقدار ذو قيمة صغيرة نسبياً	ε
التدوير	Γ
كفاءة	η
نسبة السرعة الطرفية	λ
اللزوجة الحركية	μ
اللزوجة الكينماتية	ν
دالة السريان	ψ
دالة الكمون، معامل احتكاك	φ
مقدار لا بعدي	Π
الكثافة	ρ
إجهاد	σ
الإجهاد القصي	τ
الإجهاد القصي على الجدار	τ_w

مراجع

اسم المرجع	رقم المرجع
Massey, B Mechanics of Fluids van Reinhold	1
Hughes, W, Brighton, J Theory and Problems of Fluid Dynamics Schaum	2
Rogers, Mayhew Engineering Thermodynamics, Work and Heat Transfer Longman	3
Langhoar, H Dimensional Analysis and the Theory of Modeling John Wiley	4
Goldstein, S Modern Developments in Fluid Dynamics Dover Publications	5
Schlichting, H Boundary Layer Theory McGraw-Hill	6
Anderson, J D, Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill	7
Hinze, J Turbulence McGraw-Hill	8
Glauert, H Elements of Aerofoil and Airscrew Theory Cambridge University Press	9
Streeter, V Fluid Dynamics McGraw-Hill	10
A. H. Shapiro Dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vol.1, Parts I and II Ronald	11
Leipman, H, Roshko, A Elements of Gas Dynamics International Textbooks	12
Owczarek, J Fundamentals of Gas Dynamics International Textbooks	13
Bolton, W Engineering Instrumentation & control Butterworths.	14
www.cfd-online.com/resources/	15

أرقام المراجع	الباب
1,2	1
1,2,3	2
4	3
1,5	4
1,2	5
1,2,14	6
1,2,3	7
6,7,15	8
8,6	9
9,6	10
1,11,12,13	11

فهرس و معجم المصطلحات

(عربي - انجليزي)

الصفحة	المقابل الانجليزي	المصطلح العربي
230-108-49-23-19-10-9-6	stress	إجهاد
-108-105-104-87-49-36-10-6 230-185-111	shear stress	إجهاد قصي
108	apparent turbulent stress	إجهاد موري ظاهري
107	Reynolds stresses	إجهادات رينولز
143-24-20-17-8	one dimensional	أحادي البعد
-160-143-121-115-42-40-37-36 -196-195-193-190-189-185-174 230-229-227-216-200	friction	احتكاك
98	Finite volumes	أحجام محددة
207125--93-8-7	coordinate	إحداثي
229-185-44-40-37-35	roughness height	ارتفاع الخشونة
145-98-72	displacement	إزاحة
60-59-58	stability	استقرار
185-125-124-113-104-87-18	continuity	استمرارية
140-136-135-132-117-116-115	cylinder	أسطوانة
-87-75-74-54-49-24-23-16-15 201-186-175-168-165-150-143	momentum	إضطراد
-109-106-102-94-73-30-29-13 -119-118-116-115-112-111-110 229-120	drag	إعاقة
120	road drag	إعاقة الطريق
229-119-116-111-110-109-106	skin drag	إعاقة جلدية
119-116-115	pressure drag	إعاقة ضغطية
121-111	turbulent drag	إعاقة مورية
44	branched pipes	أنابيب متفرعة
-73-72-64-63-44-37-36-25-24-8 196-195-190-150	pipe	أنبوب
212-211-68-63	pitot-static tube	أنبوب الضغط الحركي
66	Bourdon tube	أنبوب بورديو
-228-207-204-200-152-89-20 229	heat transfer	انتقال حرارة
-151-150-146-143-90-88-32-7 222-211-200-189-185-159	compressible	إنضغاطي
66-10	strain	انفعال
209-124-91-34-33-29	model	أنموذج
140	stall	انهيار
213-52	barometer	بارومتر
141-140-123-96-95-91	span	باع
104-102	Prandtl	برانتل
131-115-63	Bernouli	برنولي
103-37-30-29	dimensional	بعدي
123-108-106	Blasius	بلازيوس
71-66	Bourdon	بورديو
108	Boussinesq	بوسينسك
179-176-144-143	entropy	تديد
37-29	dimensional analysis	تحليل بعدي

230-140-139	circulation	تدوير
95-91-11	lubrication	تزييق
91	hydrodynamic lubrication	تزييق حركي
91	Hydrostatic lubrication	تزييق سكوني
229-84-52-51-50-49-32	acceleration	تسارع
33	similarity	تشابه
33	dynamic similarity	تشابه حركي
33	physical similarity	تشابه فيزيائي
33	geometric similarity	تشابه هندسي
-144-132-99-98-90-87-18-15 204-200-185-173-165-152	differential	تفاضلي
98	discretization	تفريز
-174-155-154-105-87-74-17 203-190	integral	تكامل
71-45-40	iterative	تكراري
141-59-55	equilibrium	توازن
-110-103-75-73-72-67-29-27 209-140-121-118-116	current	تيار
140-130-95-88-8-7	three dimensional	ثلاثي البعد
130-124-103-95-91-50-7	two dimensional	ثنائي البعد
141-140-139-121-119	airfoil, aerofoil	جنيح
-85-84-75-66-52-51-44-40-10 214-213-212-196-168	atmosphere	جو
51-50	container	حاوية
-75-74-54-49-24-23-19-17-15-9 185-174-168-152-150-87-84-80	control volume	حجم التحكم
107	turbulence intensity	حدة المور
229-204-145-144-96	specific heat	حرارة نوعية
-177-165-160-153-111-107-9 202-189	critical	حرج
-101-100-91-74-68-63-33-19-10 212-211-145-123-120-116-115	dynamic	حركي
65	sensitivity	حساسية
167-166-165-139-113	throat	حلق
90	convective	حملي
78	helicopter	حوامة
98	computational fluid dynamics	حوسبة الموائع
230-128-122-120-7	streamline	خط الانسياب
159-73-64-39-7	error	خطأ
230-124-108	stream function	دالة السريان
230-128-125	potential function	دالة الكمون
75-74	propeller	دفاع
139-82-79-78-76	thrust, propulsion	دفع
73-66-64-7	accuracy	دقة
-137-135-125-124-79-78-73-72 139	rotation	دوران
-202-189-179-176-167-165-147 212-211-207	subsonic	دون صوتي
-90-80-36-29-24-20-17-11-7 200-185-152-143-139-124-103	steady	رتيب
-140-139-138-137-124-36-21 229-141	lift	رفع
-177-174-161-154-136-135-63	stagnation	ركود

213-212-211-207-189-187		
229-140-139-103	angle of attack	زاوية الهجوم
229-149	Mach angle	زاوية ماخ
-161-140-119-115-113-73-21 196-195-183	downstream	سافل
-173-150-148-147-146-145-32 229-174	speed of sound	سرعة الصوت
230-137-135	tip-speed	السرعة الطرفية
17-15-9-7	flow	سريان
204-200	Rayleigh flow	سريان ريلي
185	Fanno flow	سريان فانو
134-102	Potential flow	سريان كمون
100	Couette flow	سريان كوييت
-179-160-155-154-152-151-144 223-212	Isentropic flow	سريان لاتبيدي
88-10	non-Newtonian flow	سريان لانيوتوني
136-126-7	uniform flow	سريان منتظم
105	Newtonian flow	سريان نيوتوني
91	static	سكوني
36-21	head	سمت
21	total head	سمت كلي
207-195-165-161	choked	شرق
127-54-8	radial	إشعاعي
209-168-152-120-85-84	rocket	صاروخ
-212-180-179-177-174-173-143 225	normal shock	صدمة متعامدة
212-173	oblique shock	صدمة مائلة
212-115-113-76-73-21	downstream	صعيد
-107-105-104-39-36-11-10-9 229-116-112-111-110-109-108	laminar	صفائحي
43	valve	صمام
146	sonic	صوتي
80	compressor	ضاغط
229-10-9-7-6	pressure	ضغط
214-213-212-85-66-52-44-10	atmospheric pressure	ضغط جوي
212-211-68-63	dynamic pressure	ضغط حركي
195-165-161	exit pressure	ضغط خروجي
213-212-189-187-175-161-63	stagnation pressure	ضغط ركودي
10	vacuum pressure	ضغط فراغي
10	absolute pressure	ضغط مطلق
66-10	gage pressure	ضغط مقياسي
196-195-179-165-161	back pressure	ضغط نهائي
-44-43-42-40-36-23-19-16-15-6 -121-116-115-113-76-69-66 -174-154-152-144-143-141-131 229-211-204-186	energy	طاقة
229-144	internal energy	طاقة داخلية
-109-108-107-105-104-103-102 -121-120-116-115-113-111-110 230-229-152-122	boundary layer	طبقة جدارية
111	Combined boundary layer	طبقة جدارية هجين
33	prototype	طراز بدائي
98-95-90	numerical methods	طرق عددية
73-72-60-59-58-56-55-54	buoyancy	طفو

-104-103-102-91-71-32-30-9 -185-145-140-117-112-109-107 229	Reynolds number	عدد رينولدز
229-32	Froude number	عدد فرود
-165-161-159-153-149-145-32 -202-193-189-186-180-179-175 229-207	Mach number	عدد ماخ
117-58	moment	العزم
98	finite elements	عناصر محددة
152-80-72-20	turbine	عنفة
-200-186-185-151-145-117-7 201	perfect gas	غاز كامل
209-168-80	combustion chamber	غرفة الاحتراق
88-27	unsteady	غير الرتيب
10	vacuum	فراغ
98	finite differences	فروق محددة
121-116-115-114	separation	فصل
-115-107-69-43-42-40-39-35 229-196-141-121	loss	فقد
42-40	friction loss	فقد احتكاكي
229-42	local(minor) loss	فقد موضعي
69	venturi	فينشوري
73	ultra sonic	فوق سمعي
-202-189-179-177-176-165-148 212-209	supersonic	فوق صوتي
209	hypersonic	فرط صوتي
108-105-104	Von Karman	فون كارمن
220-70-69	orifice	فوهة
229-120-79-76-74-69-20-19-6	power	قدرة
143-109-102-24-10-9-6	shear	قص
125	electrode	قطب
229-190-185	hydraulic diameter	قطر سريان
185-174-150-143-98-15-6	conservation laws	قوانين الحفظ
74-9	body force	قوة جسمية
74-23-9	surface force	قوة سطحية
229-159-89-19-18-17-15-7-6	mass	كتلة
169-144	relative mass	كتلة نسبية
-211-159-151-143-72-56-30-7 230-214	density	كثافة
229-56-13-7	relative density	كثافة نسبية
185-174	adiabatic	كظيم
230-209-83-82-76	efficiency	كفاءة
7-6	continuum	كمية متصلة
139	Kutta - Joukowski	كوتا - يوكوفسكي
26	elbow	كوع
39	Colebrook-White	كولبروك - وايت
-101-92-91-40-37-33-32-30-9 -181-180-154-145-109-105-103 230-207-193-185	dimensionless	لابعدي
132-131-126-125-124	irrotational	لا دوراني
-125-124-102-89-63-36-21-10 139-129	inviscous, inviscid	لا لزج
-91-90-89-68-49-36-24-20-18-7 159-143-131-129-128-103	incompressible	لا انضغاطي
-160-155-154-152-151-144-143	isentropic	لاتبديدي

223-212-183-182-179-173		
195-165-161-113-100	convergent	لام
179-165-113	convergent-divergent	لام-ناشر
-108-107-103-102-88-36-32-10 152-129-125-115	viscous, viscid	لزجي
230-145-10	dynamic viscosity	لزوجة حركية
108	apparent viscosity	لزوجة ظاهرية
230-214-145-10	kinematic viscosity	لزوجة كينماتية
-111-109-108-106-103-102-100 140-118	plate	لوح
229-116-111-109-107-29-9	turbulent	مائل
6	fluid	مائع
15	flux vector	متجه السريان
37	PVC (Poly vinyl chloride)	متعدد كلوريد الفينول
115	symmetric	متماثل
-144-141-139-116-115-113-63 173-152	ideal	مثالي
-152-122-113-90-69-63-18-11 191	duct	مجرى
211-144-143	enthalpy	محتوى حراري
209-120-84-82-81	jet engine	محرك نفاث
96-94-93-91	bearing	محمل
67-66	transducer	محوالة
66	Pressure transducer	محوالة ضغط
149	Mach cone	مخروط ماخ
229-121-108-107-9	turbulence	مور
58	metacenter	مركز التارجح
58	buoyancy center	مركز الطفو
59	couple	مزدوج
101-13-11	lubricant	مزلق
6	free path	مسار حر
195-161-159-28	reservoir	مستودع
127	sink	مصب
36-20	pump	مضخة
66	Bourdon gauge	مضاغط بوردو
66-65-64-63	manometer	مضاغط سائلي
215-10-7	absolute	مطلق
	Laplace equations	معادلات لابلاس
	Navier-Stokes equations	معادلات نافير- ستوكس
	Continuity equation	معادلة الاستمرارية
	Darcy formula	معادلة دارسي
	friction factor, ϕ	معامل الاحتكاك ϕ
	friction factor, f	معامل الاحتكاك f
	skin-drag coefficient	معامل الإعاقة الجلدية
	total-drag coefficient	معامل الإعاقة الكلية
	lift coefficient	معامل الرفع
	flow coefficient	معامل السريان
	road factor	معامل الطريق
	correction factor	معامل تصحيح
	volume flow rate	معدل السريان

		الحجمي
	mass flow rate	معدل السريان الكتلي
	insulated	معزول
	constriction flow meters	مقاييس السريان المقلصة
	paraboloid	المقطع المكافئ
	hydrometer	مقياس الكثافة
	strain gage	مقياس انفعالي
	orifice meter	مقياس فوهي
	gage	مقياسي
	piston	مكبس
	gradient	ممال
	source	منبع
	uniform	منتظم
	system	منظومة
	nozzle	منفث
	relative weighing	موازنة حدية
	expansion waves	موجات تمددية
	wave	موجة
	shock wave	موجة صدمية
	turbulence	مور
	diffuser, divergent	ناشر
	specific-heat ratio	نسبة الحرارة النوعية
	tip-speed-ratio	نسبة السرعة الطرفية
	aspect ratio	نسبة باعية
	metacentric radius	نصف القطر التآرجحي
	SI units	النظام العالمي للوحدات
	divergence theorem	نظرية التباعد
	buoyancy theory	نظرية الطفو
	Buckingham theorem	نظرية بكنغهام
	Froude theorem	نظرية فرود
	jet	نفث
	ramjet	نفث تصاعطي
	scramjet	نفث تصاعطي ذو الاحتراق فوق الصوتي
	crude oil	نפט خام
	stall point	نقطة الانهيار
	reference point	نقطة مرجعية
	modeling	نمذجة
	chord	وتر

فهرس و معجم المصطلحات
(انجليزي - عربي)

المصطلح الانجليزي	المقابل العربي
absolute	مطلق
absolute pressure	ضغط مطلق
acceleration	تسارع
accuracy	دقة
adiabatic	كظيم
airfoil, aerofoil	جنح
angle of attack	زاوية الهجوم
apparent turbulent stress	إجهاد موري ظاهري
apparent viscosity	لزوجة ظاهرية
aspect ratio	نسبة باعية
atmosphere	جو
atmospheric pressure	ضغط جوي
back pressure	ضغط نهائي
barometer	بارومتر
bearing	محمل
Bernouli	برنولي
Blasius	بلازيوس
body force	قوة جسمية
boundary layer	طبقة جدارية
Bourdon	بورديو
Bourdon gauge	مضاغط بورديو
Bourdon tube	أنبوب بورديو
Boussinesq	بوسينسك
branched pipes	أنابيب متفرعة
Buckingham theorem	نظرية بكنغهام
buoyancy	طفو
buoyancy center	مركز الطفو
buoyancy theory	نظرية الطفو
choked	شرق
chord	وتر
circulation	تدوير
Colebrook-White	كولبروك - وايت
Combined boundary layer	طبقة جدارية هجين
combustion chamber	غرفة الاحتراق
compressible	إنضغاطي
compressor	ضاغط
computational fluid dynamics	حوسبة الموائع
conservation laws	قوانين الحفظ
constriction flow meters	مقاييس السريان المُقلّصة
container	حاوية
continuity	استمرارية
Continuity equation	معادلة الاستمرارية
continuum	كمية متصلة
control volume	حجم التحكم
convective	حمليّة
convergent	لام
convergent-divergent	لام-ناشر
coordinate	إحداثي
correction factor	معامل تصحيح

سريان كويت	Couette flow
مزدوج	couple
حرج	critical
نפט خام	crude oil
تيار	current
أسطوانة	cylinder
معادلة دارسي	Darcy formula
كثافة	density
تفاضلي	differential
ناشر	diffuser, divergent
بعدي	dimensional
تحليل بعدي	dimensional analysis
لابعدي	dimensionless
تفريز	discretization
إزاحة	displacement
نظرية التباعد	divergence theorem
سافل	downstream
صعيد	downstream
إعاقة	drag
مجرى	duct
حركي	dynamic
ضغط حركي	dynamic pressure
تشابه حركي	dynamic similarity
لزوجة حركية	dynamic viscosity
كفاءة	efficiency
كوع	elbow
قطب	electrode
طاقة	energy
محتوى حراري	enthalpy
تبيد	entropy
توازن	equilibrium
خطأ	error
ضغط خروجي	exit pressure
موجات تمديدية	expansion waves
سريان فانو	Fanno flow
فروق محددة	finite differences
عناصر محددة	finite elements
أحجام محددة	Finite volumes
سريان	flow
معامل السريان	flow coefficient
مائع	fluid
متجه السريان	flux vector
مسار حر	free path
احتكاك	friction
معامل الاحتكاك ϕ	friction factor, ϕ
معامل الاحتكاك f	friction factor, f
عدد فروود	Froude number
نظرية فروود	Froude theorem
مقياسي	gage
ضغط مقياسي	gage pressure
تشابه هندسي	geometric similarity
ممال	gradient
سمت	head
انتقال حرارة	heat transfer

حوامة	helicopter
قطر سريان	hydraulic diameter
تزيق حركي	hydrodynamic lubrication
مقياس الكثافة	hydrometer
تزيق سكوني	Hydrostatic lubrication
مثالي	ideal
لاانضغاطي	incompressible
معزول	insulated
تكامل	integral
طاقة داخلية	internal energy
لالرزي	inviscous, inviscid
لادوراني	irrotational
لاتنديدي	isentropic
تكراري	iterative
نفث	jet
محرك نفث	jet engine
لزوجة كينماتية	kinematic viscosity
كوتا - يوكوفسكي	Kutta - Joukowski
صفائحي	laminar
معادلات لابلاس	Laplace equations
رفع	lift
معامل الرفع	lift coefficient
فقد	loss
مُزلق	lubricant
تزيق	lubrication
زاوية ماخ	Mach angle
مخروط ماخ	Mach cone
عدد ماخ	Mach number
مضاغط سائلي	manometer
كتلة	mass
معدل السريان الكتلي	mass flow rate
مركز التارجح	metacenter
نصف القطر التارجحي	metacentric radius
فقد موضعي	minor loss
أنموذج	model
نمذجة	modeling
العزم	moment
إضطراد	momentum
معادلات نافير-ستوكس	Navier-Stokes equations
سريان نيوتوني	Newtonian flow
سريان لانيوتوني	non-Newtonian flow
صدمة متعامدة	normal shock
منفث	nozzle
طرق عددية	numerical methods
صدمة مائلة	oblique shock
أحادي البعد	one dimensional
فوهة	orifice
مقياس فوهي	orifice meter
المقطع المكافئ	paraboloid
غاز كامل	perfect gas
تشابه فيزيائي	physical similarity
أنبوب	pipe
مكبس	piston
أنبوب الضغط الحركي	pitot-static tube

لوح	plate
سريان كمون	Potential flow
دالة الكمون	potential function
قدرة	power
برانتل	Prandtl
ضغط	pressure
إعاقة ضغطية	pressure drag
محوالة ضغط	Pressure transducer
دفاع	propeller
طراز بدائي	prototype
مضخة	pump
متعدد كلوريد الفينول	PVC (Poly vinyl chloride)
إشعاعي	radial
نفت تضاعطي	ramjet
سريان ريلي	Rayleigh flow
نقطة مرجعية	reference point
كثافة نسبية	relative density
كتلة نسبية	relative mass
موازنة حدية	relative weighing
مستودع	reservoir
عدد رينولز	Reynolds number
إجهادات رينولز	Reynolds stresses
إعاقة الطريق	road drag
معامل الطريق	road factor
صاروخ	rocket
دوران	rotation
ارتفاع الخشونة	roughness height
نفت تضاعطي ذو الاحتراق فوق الصوتي	scramjet
حساسية	sensitivity
فصل	separation
قص	shear
إجهاد قصي	shear stress
موجة صدمية	shock wave
النظام العالمي للوحدات	SI units
تشابه	similarity
مصب	sink
إعاقة جلدية	skin drag
معامل الإعاقة الجلدية	skin-drag coefficient
صوتي	sonic
منبع	source
باع	span
حرارة نوعية	specific heat
نسبة الحرارة النوعية	specific-heat ratio
سرعة الصوت	speed of sound
استقرار	stability
ركود	stagnation
ضغط ركودي	stagnation pressure
انهيار	stall
نقطة الانهيار	stall point
سكوني	static
رتيب	steady
انفعال	strain
مقياس انفعالي	strain gage
دالة السريان	stream function

خط الانسياب	streamline
إجهاد	stress
دون صوتي	subsonic
فوق صوتي	supersonic
قوة سطحية	surface force
متماثل	symmetric
منظومة	system
ثلاثي البعد	three dimensional
حلق	throat
دفع	thrust, propulsion
السرعة الطرفية	tip-speed
نسبة السرعة الطرفية	tip-speed-ratio
سمت كلي	total head
معامل الإعاقة الكلي	total-drag coefficient
محوالة	transducer
عنفة	turbine
مور	turbulence
مور	turbulence
حدة المور	turbulence intensity
مائر	turbulent
إعاقة مورية	turbulent drag
ثنائي البعد	two dimensional
فوق سمعي	ultra sonic
منتظم	uniform
سريان منتظم	uniform flow
غير الرتيب	unsteady
فراغ	vacuum
ضغط فراغي	vacuum pressure
صمام	valve
فنشوري	venturi
لزجي	viscous, viscid
معدل السريان الحجمي	volume flow rate
فون كارمن	Von Karman
موجة	wave